de águas superficiais. Destaque aqui para a aplicação da análise de variáveis regionalizadas (krigagem da piezometria e da transmissividade) e dos modelos matemáticos [9], [10, 1980].

6. ANÁLISE ECONÓMICA

O planeamento do aproveitamento das águas subterrâneas, embora muito ligado nas regiões áridas a problemas de sobrevivência, difíceis de traduzir em termos de economia, devem ser objecto de análise económica. Os estudos de base nas diferentes escalas, as captações, a exploração e conservação destas, e o controlo dos aquíferos, têm os seus custos. Em regime de economia de mercado é necessário medir esses custos e os benefícios resultantes da sua ocorrência, tendo em conta que o capital utilizado deve ser remunerado à taxa corrente das aplicações nas actividades a que as águas se destinam.

Os princípios e métodos de análise aqui não têm nada de novo relativamente a outras actividades económicas, pelo que não serão descritos. Mencionam-se como exemplos de aplicação prática os casos de Cabo Verde [2, 1973], para ambiente rural (doméstico e agrícola), e da Península de Setúbal [10, 1980] para ambiente urbano e industrial.

7. LEGISLAÇÃO

A necessidade de legislação como instrumento de coordenação das acções de planeamento e subsequente disciplina de utilização das águas subterrâneas é por demais evidente e justifica uma menção em capítulo especial.

Não se pode, no âmbito deste trabalho, dar ao tema o desenvolvimento que ele merece, pois uma legislação adequada é tão importante para o êxito do planeamento quanto a sensibilização e empenhamento das populações utentes da água subterrânea já mencionados em capítulo anterior.

Essa legislação tem que ter em conta a relação entre as utilizações das águas superificiais e subterrâneas, entre os utentes do mesmo aquífero e da mesma organização de conservação (em geral não será economicamente viável cada sistema de captação e elevação dispôr de organização própria de conservação) e entre os custos de controlo e protecção geral dos aquíferos e o preço da água ao consumidor. Deve permitir a tomada de medidas administrativas para a resolução dos problemas que as mencionadas relações implicam, e deve ainda constituir instrumento adequado a dirimir questões entre as partes envolvidas no processo.

8. CONCLUSÕES

O Planeamento em águas subterrâneas é uma actividade complexa e multifacetada.

Do ponto de vista científico envolve conhecimento de diversas disciplinas como a meteorologia, a hidráulica, a química, a geologia, a matemática, a economia, etc. Do ponto de vista tecnológico, exige o domínio de capacidades que vão desde as mais rudimentares em captações até às mais sofisticadas, por exemplo, na utilização adequada de instrumentos matemáticos para modelagem de aquíferos.

Contém uma forte componente socio-política e económica. Com efeito, ao destinar-se a fins que vão desde a sobrevivência das populações à actividade económica agro-pecuária e industrial, ao envolver extensões territoriais e investimentos muito significativos e ao exigir a coordenação com actividades afins, como as dos aproveitamentos hidráulicos superficiais, não pode deixar de ser objecto de atenção, a todos os níveis, dos que têm responsabilidades administrativas e legislativas. E isto diz-se tanto em relação ao país onde a actividade de planeamento se desenvolve quanto em relação a organismos internacionais [11, 1983].

Quem pois tem responsabilidades no planeamento de águas subterrâneas terá que atender à complexidade da sua natureza. Qualquer atitude miópica a este respeito só pode concorrer para o fracasso de uma actividade que pode pôr ao serviço do homem recursos de valor muitas vezes insuspeitado pelos próprios que a ela se dedicam.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] RUAS, O., 1943, Estudo prévio dos aspectos político e económico do problema do Abastecimento de água ao Sul da Província da Huíla, Relatórios, Ano de 1941, Imprensa Nacional de Angola, Luanda.

[2] BURGEAP, 1962, Hydrogéologie du Sud du Save, Serv. Geol. Min. Moç., Bol. n.º 30 (Síntese de cinco relatórios Inéditos sobre a mesma região do Sul do Save).

1969, Centro de Estudos de Cabo Verde, Esquisse Hydrogéologique des Iles de Cap Vert, Rel. In.

1972, Brigada de Águas Subterrâneas de Cabo Verde, Rapport Preliminaire, Programme de Travau, Min. Ult., - Insp. Ger. Minas, Rel. In.

1973, Brig. Ag. Sub. Cabo Verde. Mise en Exploitation Controlé des Quifères. Min. Ultr., Insp. Ger. Min., Rel. In.

[3] FREITAS, F., 1965, As Águas Subterrâneas na Província de Moçambique, Prim. Jorn. de Eng. de Moç., Comunicações, Vol. Eng. de Minas pp 201 a 220 (o Esboço Hidrogeológico de Moçambique, devia ter aparecido como anexo a esta publicação mas ficou inédito).

1962 (a), Les Cartes Hydrogéologiques au 1:2.000.000 ème et au 1:250.000 ème du Moçambique, Ass. Int. Hidrog., Mem. Tome V.

1962 (b), Condições Hidrogeológicas de Abastecimento de Águas Subterrâneas a Lourenço Marques e Arredores, Bol. Soc. Est. Moç. n.º 133, pp 119 a 138.

[4] CTPIEM, 1966, III.º - Plano de Fomento - Parte II: Relatórios Sectoriais - Vol. 5: Águas (Rel. In.).

SPIEM, 1970, Problemas de Abastecimento de Águas às Populações Rurais e Gados: Coordenação, Vol. 12, Estudos (Rel. In.).

[5] SUDENE, Inventário Hidrogeológico Básico do Nordeste, folhas da cartografia hidrogeológica em escala 1:500.000. Recife.

[6] GARCIA PEREIRA, H., 1981, Projecto para o desenvolvimento de uma base de dados de recursos naturais (Prova complementar apresentada ao Instituto Superior Técnico para obtenção do Grau de Doutor em Ciências da Engenharia - Planeamento Mineiro).

[7] FLORES, F.A. e CARVALHO, H., 1965, Utilização das Águas Subterrâneas para o Abastecimento de Água em Regiões Áridas e Semiáridas, Prim. Jorn. de Eng. de Moç., Comunicações, Vol. Eng. Min., pp 327 a 363.

[8] SERAFINO, J.F.C. e GARCIA, R.S., 1977, Pesquisa de Águas Subterrâneas entre os Rios Limpopo e Save, Bol. Serv. Geol. Min., Moç., n.º 39, pp 117 a 126.

[9] RIBEIRO, L., SAVARN (Sistema para Avaliação e Valorização de Recursos Naturais), Centro de Valorização de Recursos Minerais, Instituto Superior Técnico, Lisboa, pp 199 a 211.

[10] PNUD, 1980, Étude des Eaux Souterraines de la Péninsule de Setúbal, Rapport final, PNUD/POR/77/015, Lisboa, In.

[11] UNESCO, IAH, IAHS, IHP (F.R.G. Nat. Comm.), 1985, Ground Water in Water Resources Planning, Proc. Symp. Koblenz, 2 Vol., 1214 p.

A CURVA LIMITE DE ESTAMPAGEM NA ANÁLISE DE UMA ESTAMPAGEM RECTANGULAR EM AÇO INOXIDÁVEL

RUI M. S. O. BAPTISTA*
JORGE M. C. RODRIGUES*
MANUEL J. M. BARATA MARQUES**

RESUMO

Com o presente trabalho pretende-se, através das CLE, analisar as condições em que actualmente se produzem as bacias para lava-louças na Fábrica Portugal de modo a avaliar da possibilidade de se introduzirem alterações no fabrico que permitam a produção de bacias com paredes laterais ligeiramente cónicas por estampagem.

ABSTRACT

In the present work the production conditions of a sink in "Fábrica Portugal" are analised.

Using the concept of the forming limit curves it is possible to access the modifications to introduce in the manufacturing process in order to produce a sink with slightly conical lateral walls by deep drawing.

1 - INTRODUÇÃO

Os processos tecnológicos de deformação plástica de metais permitem obter peças a uma cadência elevada utilizando praticamente todo o material empregue. De entre esses processos, a ESTAMPAGEM, que permite a obtenção de uma peça de superfície não planificável a partir de uma chapa plana que manterá sensivelmente constante a sua espessura média, é um processo largamente utilizado. A estampagem é uma operação complexa onde intervêm numerosos parâmetros, uns ligados à geometria da peça (cilíndrica, retangular, cónica, etc.), outros ligados às condições de operação (pressão do encostador, lubrificação, geometria e acabamento superficial da ferramenta, etc.) e outros ainda ligados às características do material seleccionado para a peça (coeficientes de encruamento e anisotropia, tensão de rotura, etc.).

O encostador tem uma grande influência sobre o modo como se dá a deformação do material. Assim, quando ele exerce uma forte pressão sobre a chapa impedindo o seu escorregamento, o processo é designado por EXPANSÃO, sendo ambas as extensões maior e menor no plano da chapa positivas, enquanto que quando o encostador exerce uma menor pressão que, embora evite o engelhamento, permite o fluir do material sobre o punção, o processo é designado por RETRACÇÃO, sendo neste caso a maior das extensões no plano da chapa positiva enquanto que a menor é negativa.

Ao material estão associados problemas de instabilidade durante o processo que vão provocar afastamentos em relação à peça pretendida motivados por defeitos de forma (engelhamento e recuperação elástica) ou pelo aparecimento de uma não uniformidade na distribuição da espessura ocasionada pelo aparecimento de um escoamento plástico localizado (estricção) que poderá conduzir a uma posterior rotura. Estes fenómenos limitam as possibilidades de deformação do material e são tanto mais relevantes quanto menor for a espessura da chapa e maior a sua tensão limite de elasticidade. A tendência actual é de utilizar cada vez mais materiais com estas características a fim de diminuir o peso dos componentes e obter reduções significativas de consumos de energia e de matérias primas. Daqui se conclui da necessidade de uma análise profunda da influência daqueles fenómenos nos processos de deformação plástica.

O conhecimento das deformações máximas que o material pode suportar pode ser obtido com o auxílio

* Eng. Mecânico (IST), Assistente da Secção de Tecnologia Mecânica do IST. Investigador do CEMUL.
** Eng.º Mecânico (IST), Professor Auxiliar da Secção de Tecnologia Mecânica do IST. Investigador do CEMUL.
Original recebido para publicação em 11/7/85.

das CURVAS LIMITE DE ESTAMPAGEM (CLE) (*). A CLE é uma representação gráfica no plano das extensões (ϵ_1, ϵ_2) (**) que o divide em duas zonas: uma zona inferior a que correspondem peças bem sucedidas e uma zona superior a que correspondem peças que "rompem" no decurso do processo de deformação. As CLE apareceram em 1965 com os trabalhos de Keeler (1) que as determinou em expansão biaxial, tendo sido completadas posteriormente por Goodwin (2) para o domínio da retracção.

A CLE põe em evidência a não existência de um critério simples de rotura ou estricção havendo pois uma função de ϵ_1 e de ϵ_2.

O interesse prático das CLE assenta nas seguintes razões:

— Nenhuma rotura ou estricção (***) se pode dar em pontos situados abaixo da curva.

— Se por um processo de cálculo forem previstas as extensões ϵ_1 e ϵ_2 que terão lugar durante a estampagem então, de acordo com a posição desse ponto relativamente à CLE, determinar-se-á se a operação é possível ou não.
— Avaliação do grau de segurança com que se realiza a estampagem.
— Qualificação dos diferentes materiais em função da sua aptidão para estampagem.
— Análise da influência dos diversos parâmetros de estampagem.

A CLE é traçada a partir dos resultados obtidos em diferentes ensaios laboratoriais de estampagem sobre chapas previamente marcadas com um determinado motivo: Rede. A precisão da CLE obtida depende do grau de precisão da marcação da rede e do tipo desta, do grau de precisão do processo de leitura, do tipo de ensaios realizados e, ainda, do próprio laboratório em que foram efectuados.

Utilizam-se dois tipos de redes: as quadriculadas que são utilizadas para uma pequeníssima dimensão do motivo (****), e mais frequentemente as redes formadas por círculos (afastados, tangentes ou entrelaçados) que dão de imediato a indicação das direcções principais no plano da chapa. Os processos mais usuais para a sua marcação na chapa são realizados com aresta cortante, com tinta ou por meios fotográficos, fotoquímicos, electroquímicos ou fotoelectroquímicos (6).

De entre os diversos ensaios de estampagem (3), (4), (7), (8) e (9), os mais divulgados são o Bulge Test e ensaio Erichsen modificado, no domínio da expansão e o ensaio Swift no domínio da retracção. Existem outros ensaios que permitem determinar pontos da CLE em ambos os domínios, sendo de realçar de entre eles o ensaio Nakazima.

A leitura das redes (4), (10) e (11) pode ser efectuada directamente ou por leitura num elemento intermédio para o qual se "imprimiu" ou copiou a rede deformada.

Para a obtenção de resultados significativos é necessário que:

— A estricção ou rotura se tenha iniciado no círculo que se mede.
— A estricção ou rotura passe pelo centro do círculo para que ele esteja disposto simetricamente, quer ao gradiente de deformação, quer à rotura.

2. PARÂMETROS DAS CLE

A caracterização do estado actual do conhecimento sobre as CLE é apresentado conjuntamente com os principais parâmetros que as influenciam.

2.1. Dimensão da rede. Curva limite intrínseca

Dos resultados experimentais (3), (4) e (5) as seguintes conclusões podem ser retidas:

— A dimensão dos círculos depende da taxa de deformação local e não da dimensão da peça.
— A CLE à estricção é pouco influenciada pelo diâmetro do círculo; a CLE à rotura depende bastante da dimensão do círculo.
— Sanz e Grumbach (12) mostraram que o diâmetro do círculo influenciava muito o valor de ϵ_1 e não influenciava o valor de ϵ_2. Foi assim possível obter as CLE intrínsecas (para um diâmetro de círculo nulo) que são independentes da trajectória de deformação (*****).

(*) Na literatura Francesa:
— COURBE LIMITE DE FORMAGE (CLF)
— COURBE LIMITE D'EMBOUTISSAGE (CLE)

Na literatura Inglesa:
— FORMABILITY LIMIT CURVE (FLC)
— FORMING LIMIT DIAGRAM (FLD)
— FORMING LIMIT CURVE (FLC)

(**) ϵ_1 e ϵ_2 são, respectivamente, as extensões principais, maior e menor, medidas no plano da chapa, a extensão segundo a espessura da chapa será designada por ϵ_3. As CLE são representadas quer em função das extensões nominais quer em função das extensões logarítmicas.

(***) As CLE à estricção são mais difíceis de traçar devido à dificuldade experimental em se determinar o início da estricção localizada. Para a sua determinação usam-se os métodos de Veerman, Bragard, Hecker e Kobayashi (3), (4), (5), conduzindo todos eles à mesma CLE à estricção, sendo a selecção do método a utilizar efectuada em função do equipamento disponível em cada laboratório.

(****) Os traços podem estar afastados de uma dimensão da ordem de 0,25 mm.

(*****) Trajectória de deformação é a linha que representa a sucessão de deformações (ϵ_1, ϵ_2) que sofreu o círculo onde se produziu a estricção ou rotura final.

2.2. Espessura da chapa

A possibilidade de realizar com êxito uma operação através do aumento da espessura pode ser avaliada determinando o tipo de deformação predominante pois verifica-se que o aumento de espessura eleva a CLE à estricção significativamente no domínio de expansão (5), (13), (14) e (15).

2.3. Trajectória de deformação

As CLE referidas são obtidas em trajectórias simples, lineares, (3) e (5). Estas trajectórias lineares não representam bem a situação real das estampagens industriais, particularmente quando se trata de estampagens em várias fases. As CLE determinadas em trajectórias complexas(*) dependem do modo como se deu a deformação na primeira fase (14), (15), (16) e (17). Da análise das CLE em trajectória complexa torna-se evidente a seguinte regra fundamental: começar sempre por uma deformação em retracção antes de se fazer um passo em expansão, para obter uma maior deformação global final.

O CETIM(**) e o IRSID(***) apresentam uma explicação para esta influência através da análise das extensões equivalentes(****) (3), (4) e (5).

A influência das trajectórias de deformação nas CLE convencionais é um dos principais problemas que se põem a uma maior utilização das CLE.

2.4. Coeficientes de encruamento e de anisotropia

O coeficiente de encruamento, *n*, traduz a capacidade do material em repartir as deformações sobre toda a superfície evitando, portanto, a localização da deformação, melhorando desse modo a capacidade do material em suportar deformações por expansão, tanto mais quanto maior for o valor de *n*. Este facto justifica igualmente a pouca influência de *n* sobre o coeficiente de estampagem, *m* (*****).

Ao contrário do que acontece com o coeficiente de encruamento verificou-se uma acentuada influência do coeficiente de anisotropia, *r* (******), no valor do coeficiente de estampagem. Assim Sebaie e Mellor (18) verificaram que quanto maior for *r*, menor é o coeficiente de estampagem, o que é natural uma vez que o coeficiente de anisotropia traduz a capacidade de o material se opor ao adelgaçamento.

Genericamente, pode-se dizer que quanto maior for o valor de *r* e de *n*, maior é a aptidão do material para estampagem, não alteram, sensivelmente, a posição da CLE mas sim as trajectórias de deformação (3), (4), (5), (19) e (20). Os resultados experimentais mostram que:

— quando *r* aumenta a trajectória de deformação desloca-se para a esquerda (5) sendo esta influência significativa em retracção e nula na zona de expansão.

— quando *n* aumenta, a trajectória de deformação desloca-se para a direita e a rotura dá-se para valores de ϵ_1 maiores, sendo esta influência significativa na zona de expansão e nula na zona de retracção.

— As CLE em trajectórias complexas são tanto mais elevadas quanto maior for *n* (14) e (15).

— A CLE em trajectória complexa sequência de tracção → expansão sobre quando *r* aumenta (14) e (15).

3. TRABALHO EXPERIMENTAL

A preparação das estampas para ensaio e a leitura e tratamento dos resultados foram efectuados no Laboratório da Secção de Tecnologia Mecânica. As operações de estampagem decorreram na Fábrica Portugal utilizando a prensa que produz os actuais lava-louças.

3.1. Descrição do equipamento e da peça a obter

A forma e as dimensões da bacia a estampar estão especificadas na Fig. 1.

O material utilizado foi chapa de aço inoxidável 18/8 (AISI 304) com as seguintes características:

— composição química em %

$c \leq 0.08$	$P_{max} = 0.04$
$Si_{max} = 0.75$	$S_{max} = 0.03$
$Mn \leq 2.0$	$Cr = 18.0/19.0$
	$Ni = 8.0/9.0$

— características mecânicas:

$\sigma r = 53\ kg/mm^2$	Alongamento : 40%
$\sigma e = 21\ kg/mm^2$	Dureza : 90 HRB

— espessura:

$e = 0.7$ mm

Utilizou-se uma prensa hidráulica Müller de duplo montante e duplo efeito com 500 toneladas no cabeçote principal e 350 toneladas no encostador.

(*) Para simular uma trajectória complexa realizam-se dois ensaios de estampagem simples seguidos, ou seja, obtêm-se duas trajectórias lineares diferentes.

(**) CETIM - Centre Technique des Industries Mécaniques, Senlis, France.

(***) IRSID - Institut de Recherches de la Sidérurgie Française.

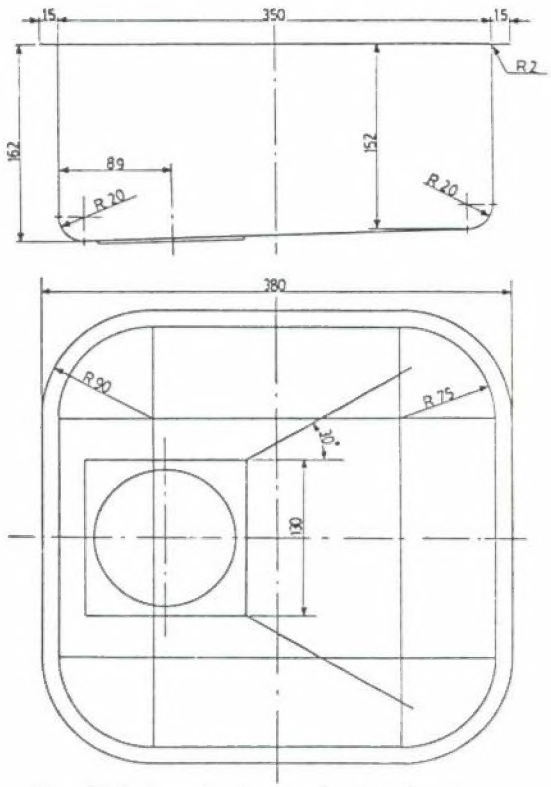
(****) Extensão equivalente $\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\epsilon_1-\epsilon_2)^2 + (\epsilon_1-\epsilon_3)^2 + (\epsilon_2-\epsilon_3)^2}$

(*****) coeficiente de estampagem *m*: quociente entre o diâmetro do punção e o diâmetro máximo da estampa que pode ser estampada sem rotura por esse punção. Na literatura inglesa aparece frequentemente o Limit Drawing Rate (LDR) que é o inverso do coeficiente de estampagem.

(******) Coeficiente de anisotropia $r = \frac{\epsilon l}{\epsilon t}$, sendo:

ϵl - extensão logarítmica segundo a largura

ϵt - extensão logarítmica segundo a espessura



Obs: Este desenho é aproximado pois, de facto, as paredes laterais têm um raio de curvatura de R=900 mm.

FIG.1

Bacia a estampar

A ferramenta é formada por um punção e um encostador com pinos de centragem, montados na base da prensa e a matriz montada no prato superior da prensa, não havendo qualquer outro guiamento entre punção e matriz que não seja o resultante do próprio guiamento da prensa. O punção e o encostador são integralmente em aço enquanto que a matriz tem um anel em bronze alumínio para diminuir os atritos e os desgastes.

As características geométricas determinantes no processo de estampagem são as seguintes:

— raio do canto do cunho $r_{cc} = 20$ mm
— raio do canto da matriz $r_{cm} = 2$ mm
— folga na zona dos cantos $j = 0.99$ mm
— folga na zona dos lados $j = 0.88$ mm

3.2. Ensaios

Realizou-se um primeiro ensaio experimental para definir o processo de marcação das redes, a dimensão dos círculos, o processo de leitura e as secções típicas a estudar. Os resultados deste ensaio conduziram a adoptar marcações de círculos de 10 e 15 *mm* de diâmetro com canetas de acetatos e segundo as secções típicas indicadas na Fig. 2. A leitura das elipses foi efectuada com uma luneta micrométrica equipada com uma escala graduada e ampliação (7×) à excepção das que se encontravam na zona dos cantos do "cunho" e "matriz" que foram copiadas para uma fita adesiva transparente e posteriormente lidas com a mesma luneta micrométrica.

Embora a bacia tenha apenas um eixo de simetria, considerou-se a existência de quatro quadrantes (IQ, IIQ, IIIQ e IVQ) havendo em cada um deles duas secções típicas "simétricas" à excepção, obviamente, do canto/secção central.

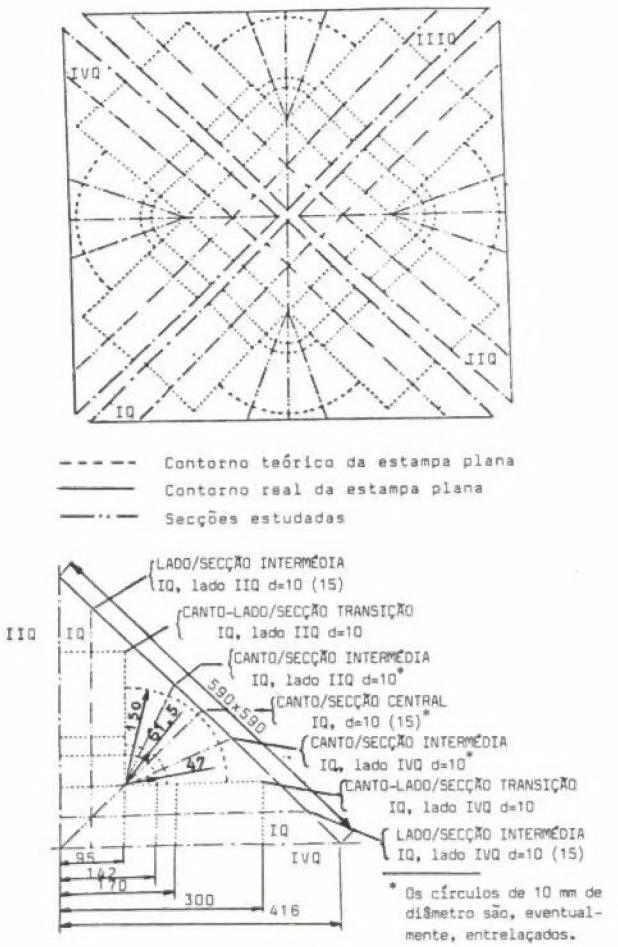


FIG.2

Geometria da estampa plana. Rede e nomenclatura utilizadas nos ensaios nº 2, 4 e 5

Após o ensaio experimental (EN. 1) realizaram-se mais quatro ensaios nas seguintes condições:

Ensaio 2 (EN.2): utilizou-se uma rede formada por círculos entrelaçados no canto/secção central e canto/secção intermédia(*), estando as condições do ensaio especificadas na Fig. 3. Utilizou-se uma pressão elevada no encostador(**) e sem lubrificação de modo a promo-

(*) cerca de 600 círculos por ensaio.

(**) As condições industriais de estampagem são: (as do EN.1)
Força no encostador: 200 ton.
Força máxima de estampagem: 60 a 80 ton.
Lubrificação: tal como nos ensaios EN.4 e EN.5.

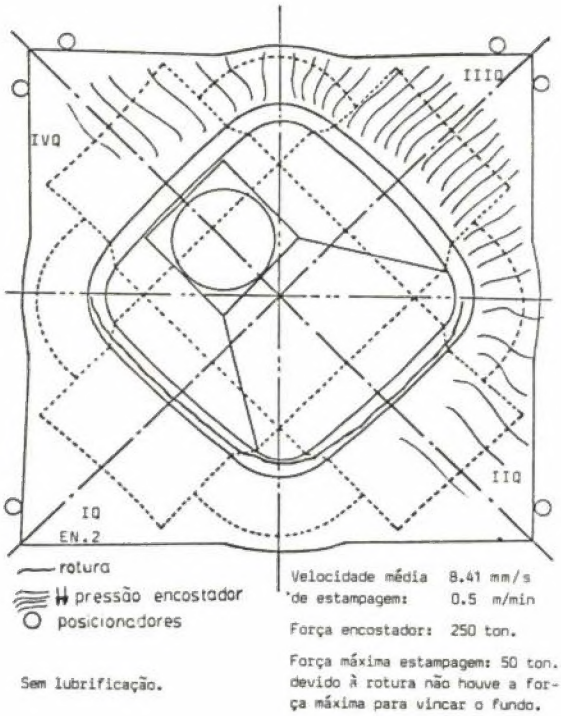


FIG.3

Condições do ensaio 2 (EN.2)

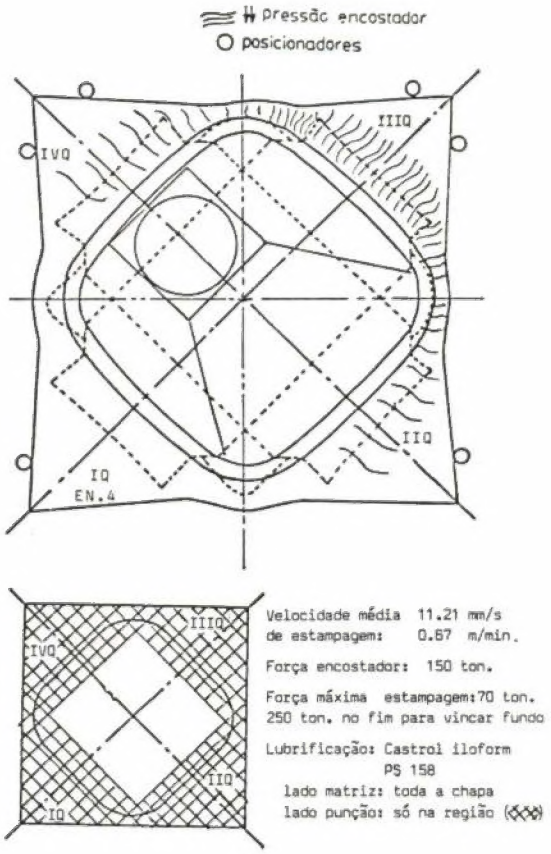


FIG.4

Condições do ensaio 4 (EN.4)

ver o aparecimento de rotura e assim obter pontos de rotura no plano das extensões (ϵ_1, ϵ_2).

Ensaio 3 (EN.3): ensaio idêntico ao anterior em que se diminui, ligeiramente, a pressão do encostador e lubrificou-se apenas a chapa do lado da matriz e somente nas zonas que irão formar os cantos da bacia. Tal como no anterior houve rotura.

Ensaio 4 (EN.4): utilizou-se uma rede formada por círculos tangentes, sendo as condições do ensaio as especificadas na Fig. 4. Neste ensaio simulou-se a pressão mínima do encostador sem engelhamento.

Ensaio 5 (EN.5): utilizou-se uma rede formada por círculos entrelaçados no canto/secção central e canto/secção intermédia, sendo as condições de ensaio as especificadas na Fig. 5. Com este ensaio simulou-se o aumento de pressão do encostador sem provocar rotura.

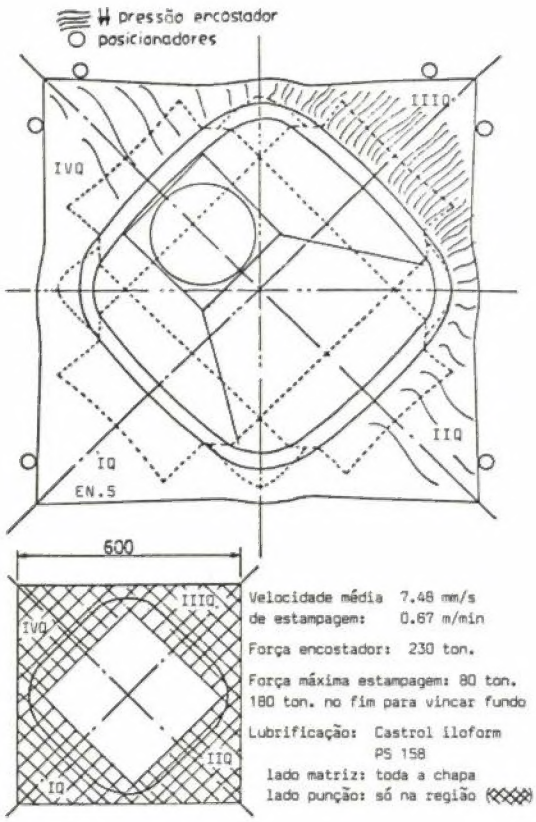


FIG.5

Condições do ensaio 5 (EN.5)

Estes ensaios permitem analisar o efeito da pressão do encostador (EN.4 e EN.5), da lubrificação (EN.2 e EN.5) e ainda, do modo como a pressão se distribui pela chapa num mesmo ensaio.

Neste estudo não foram detectadas variações signifi-

cativas na posição das frentes de deformação, F.D.(*), entre o EN.2 e o EN.3 pelo que não se apresentam os resultados obtidos no EN.3.

4. RESULTADOS

A influência da pressão do encostador manifestou-se sob dois aspectos:

a) Uniformidade ou irregularidade na distribuição de uma dada pressão do encostador nas diversas regiões de uma estampa plana.
b) Valor, maior ou menor, da pressão do encostador.

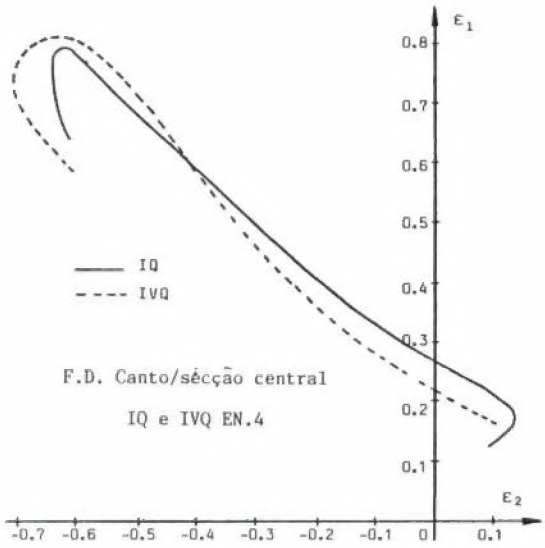


FIG.6

As figuras 6 e 7 e as figuras 8 e 9 revelam o andamento idêntico entre as F.D. dos IQ e IVQ entre si e dos IIQ e IIIQ entre si. As F.D. do IQ e IVQ apresentam em relação às F.D. do IIQ e IIIQ uma maior expansão na zona do fundo da bacia e na parte cilíndrica, retracção, evidencia-se um aumento da extensão ϵ_1 e uma ligeira diminuição (em módulo) da extensão ϵ_2. Estas evoluções resultam da assimetria com que a pressão exercida pelo encostador se distribui na chapa. Verificou-se a existência de pressão mais elevada no IQ e no IVQ.

O IVQ e o IIIQ apresentam, na zona de retracção, um ϵ_1 mais elevado do que o IQ e o IIQ, respectivamente, uma vez que a bacia é ligeiramente mais alta do lado do IIIQ e IVQ.

(*) Neste trabalho designar-se-á por FRENTE DE DEFORMAÇÃO (F.D.) a linha que melhor se ajusta aos pontos representativos, no plano das extensões (ϵ_1, ϵ_2), das deformações sofridas pelos diferentes pontos do material ao longo de uma dada secção da bacia. Estas extensões (ϵ_1, ϵ_2) foram medidas no fim da operação de estampagem.

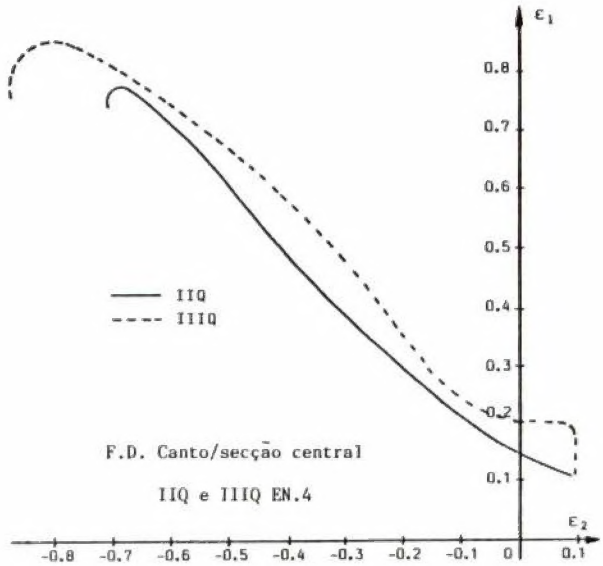


FIG.7

Mesmo sem analisar os resultados do EN.4 e EN.5 entre si, pode-se avaliar da influência da pressão do encostador analisando, num único ensaio, secções idênticas mas sujeitas a pressões diferentes.

A análise anterior vem reforçada pela análise comparativa das figuras 6 e 8 e figuras 7 e 9, onde se evidencia para o caso do EN.5 (maior pressão do encostador):

— aumento da expansão no fundo
— tendência ao aumento do ϵ_1 na parte cilíndrica, retracção
— ligeira diminuição, em módulo, do ϵ_2 na mesma parte cilíndrica.

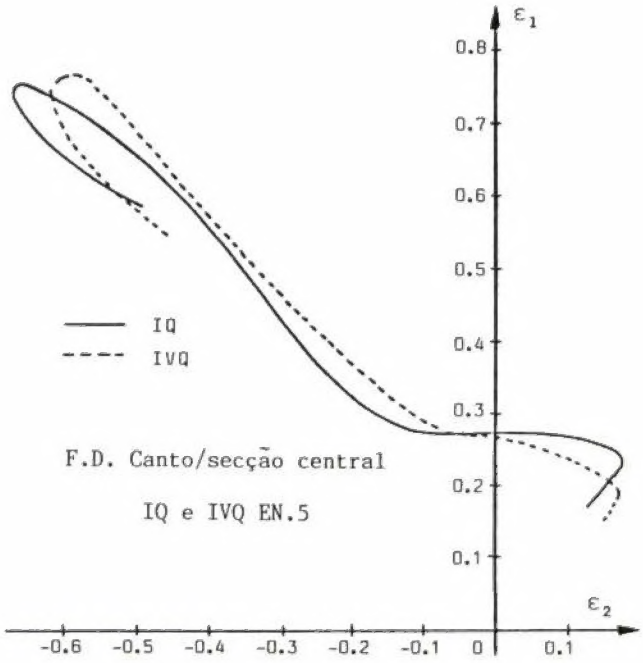


FIG.8

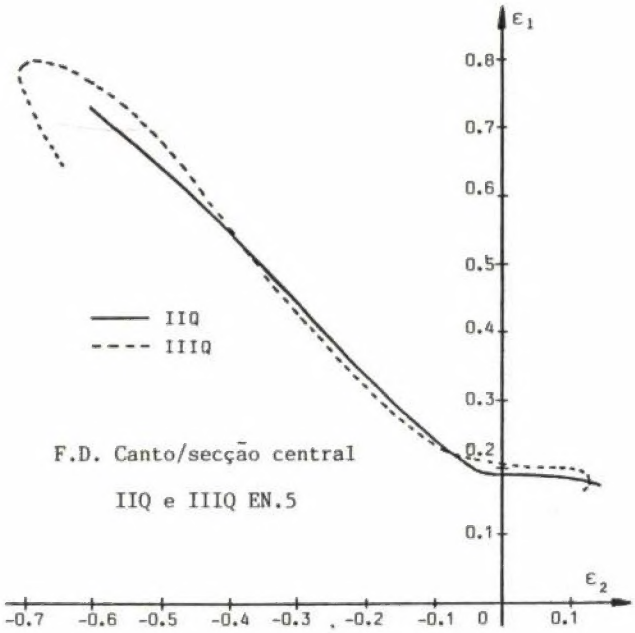


FIG.9

É evidente a melhor concordância entre as F.D. do EN.5 do que a que existe para as F.D. do EN.4 que se explica pela utilização de círculos entrelaçados no EN.5.

A análise da influência da pressão do encostador atrás exposta verifica-se igualmente nas restantes secções (6), havendo uma menor concordância entre as F.D. do que a que existe no canto/secção central, uma vez que sendo menores as deformações vem ampliado o efeito da precisão de leitura e de marcação das redes, assim como da assimetria das secções em estudo.

O factor de ampliação das deformações, Quadro I, não apresenta variações significativas.

A influência da não uniformidade da distribuição da pressão é também evidente pela análise dos resultados do EN.2 que se apresentam em seguida.

QUADRO I

FACTOR AMPLIAÇÃO (*) SECÇÃO	EN.4		EN.5	
	ε_1	ε_2	ε_1	ε_2
Canto/Secção central	2.1	6.8	1.9	6.8
Canto/Secção intermédia	1.5	4.8	1.6	4.8
Canto-lado/Secção de transição	1.1	1.8	1.1	1.8
Lado/Secção intermédia	1	1	1	1

(*) Considerou-se os valores de ε_1 e ε_2 do lado/secção intermédia como valores de referência.

A influência da lubrificação é avaliada pela análise dos resultados do EN.2, figuras 10 e 11, comparativamente aos do EN.5, tendo-se observado:

— Significativo aumento da expansão no fundo.
— Grande aumento da extensão ϵ_1 na região dos $\epsilon_2 \approx 0$, resultando deste facto o aparecimento de rotura.

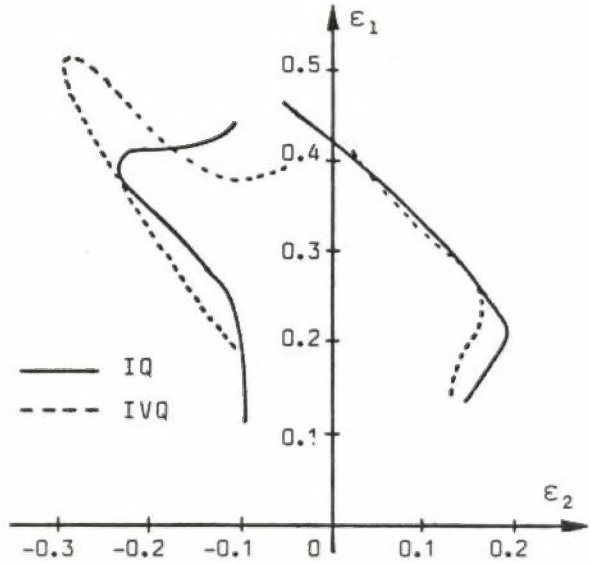


FIG.10

F.D. Canto/secção central IQ e IVQ EN.2

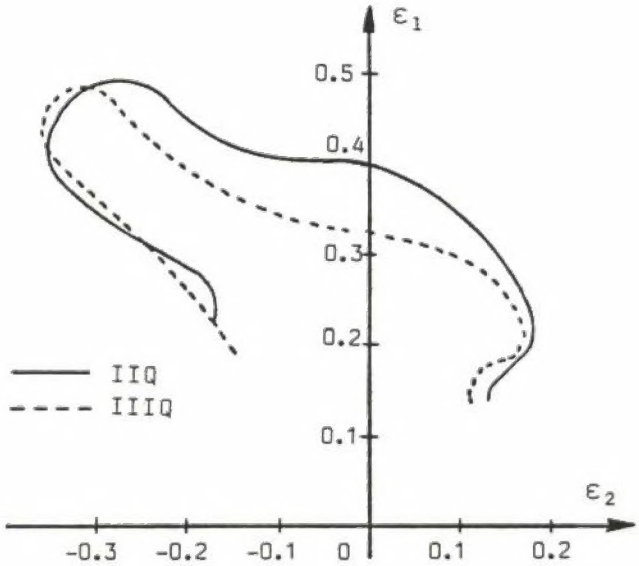


FIG.11

F.D. Canto/secção central IIQ e IIIQ EN.2

— Os pontos de rotura, obtidos no EN.2 para o canto/secção central e canto/secção intermédia localizam-se na região dos $\epsilon_2 \approx 0$, Fig. 12.
— Nos quadrantes onde a pressão era mais elevada, IQ e IVQ, apareceram roturas, que pela análise dos resultados se conclui surgirem primeiro no IQ e depois no IVQ tendo-se propagado e vindo a encontrar-se.
— A rotura deu-se para uma penetração do punção superior a $r_{cc} + r_{cm}$, que se pode explicar pelo facto de se estar a utilizar um aço inoxidável austenítico que encrua rapidamente quando deformado plasticamente a frio.

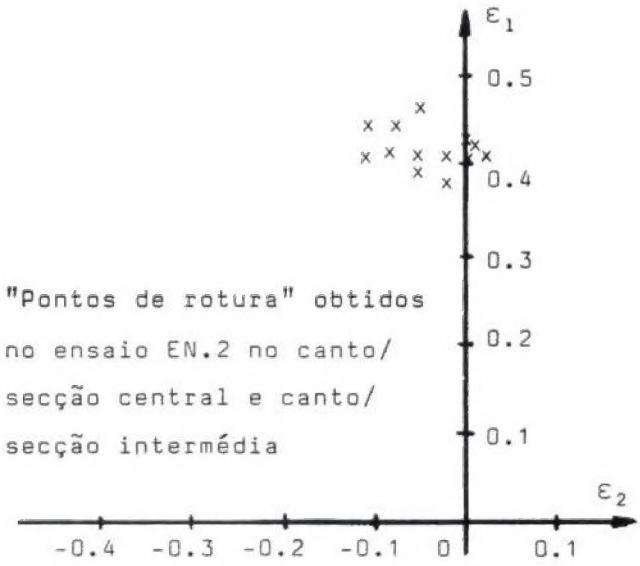


FIG.12

5. CONCLUSÕES

A peça em estudo apresenta um único eixo de simetria o que criou dificuldades adicionais em virtude das alterações que produz nas F.D. a não simetria biaxial.

Como principais conclusões a reter tem-se:

— Um raio do canto da matriz, r_{cm}, excessivamente pequeno provoca um grande aumento das extensões ϵ_1;
— O r_{cm} muito pequeno associado a um grande raio do canto do cunho, r_{cc}, provoca um grande aumento das tensões para que se inicie a estampagem da aba, com o consequente aumento da expansão na zona do fundo da bacia;
— Necessidade de se utilizarem ferramentas bem guiadas. Da não existência de guiamento nesta ferramenta resultou uma eventual não uniformidade na distribuição da folga e na "centragem da chapa", bem como uma assimetria na distribuição da pressão que o encostador exerce. Esta assimetria na distribuição da pressão mostrou ter bastante importância, nomeadamente para determinar as secções onde se inicia a rotura, pelo que há que ter cuidado especial na manutenção das prensas.
— O aumento da pressão do encostador provoca:
  a) aumento da expansão no fundo da bacia;
  b) aumento de ϵ_1 na parte cilíndrica (retracção);
  c) diminuição do módulo de ϵ_2 na parte cilíndrica;
  d) quando a pressão aumenta, pelo facto de o ϵ_1 aumentar na região dos $\epsilon_2 \approx 0$ há a possibilidade do aparecimento de rotura;
  e) não se notaram alterações significativas no valor do factor de ampliação das deformações.
— A não utilização de lubrificação mostrou-se particularmente inadequada, pois:
  a) aumenta muito a expansão do fundo da bacia;
  b) aumentam muito as extensões ϵ_1 na região dos $\epsilon_2 \approx 0$ com o consequente perigo de rotura;
  c) aumenta o desgaste da ferramenta;
  d) aumenta a temperatura de trabalho.
— Atendendo à pequena espessura da chapa e aos ensaios realizados não parece possível, mantendo as características geométricas fundamentais do punção e da matriz ($r_{cc} = 20$ mm e $r_{cm} = 2$ mm), a inclinação da parede lateral da peça pois o aumento da pressão do encostador necessário para evitar o engelhamento provocaria o aparecimento de rotura.
— Aconselha-se a mudança da geometria da bacia no sentido de aumentar o raio do canto da matriz ($r_{cm} \approx 5$ mm) e diminuir o raio do canto do cunho ($r_{cc} \approx 4$ mm), bem como aumentar o raio de curvatura das partes laterais da bacia. Com esta alteração geométrica e um ligeiro aumento da espessura da chapa, os resultados experimentais levam a concluir ser possível obter peças com paredes laterais ligeiramente cónicas numa única estampagem.

AGRADECIMENTOS

Os autores desejam agradecer a colaboração dada pela Fábrica Portugal na execução dos ensaios experimentais e a utilização das suas instalações e equipamentos.

BIBLIOGRAFIA

(1) KEELER, S.P. — "Determination of forming limits in automotive stamping". Soc. Automotive Engrs., paper n.º 650635 (1965).

(2) GOODWIN, G.M. — Soc. Automotive Engrs., Congress Détroit, JAN. paper n.º 680093 (1968).
(3) PARNIÈRE, G. e SANZ, G. — "Appréciation des caractéristiques d'emboutassibilité des tôles minces". Mise en Forme des Métaux et Alliages. Cap. XIX. Éditions du CNRS (1976).
(4) Tese de doutoramento efectuada no Laboratoire de Physique et de Technologie des Matériaux de l'Université de Metz — Laboratoire associé au C.N.R.S., n.º 155.
(5) Techniques de l'Ingénieur — Métallurgie** Métaux. Alliages. Métallurgie pgs. M 695 e M 696 (1980).
(6) BAPTISTA, R.M.S.O. — "A curva Limite de Estampagem. Estudo no espaço das extensões da estampagem de uma bacia rectangular em aço inoxidável 18/8". (1984).
(7) Techniques de l'Ingénieur. Métallurgie**. Métaux. Alliages. Métallurgie pg. M 124-1 (1980).
(8) POMEY, G. e GRUMBACH, M. — "Quelques corrélations entre les coefficients d'anisotropie et d'écrouissage". Revue de Métallurgie — OCT. (1964).
(9) POMEY, G. — "Comparaison de quelques essais d'emboutissage". Revue de Métallurgie. OCT. (1966).
(10) GOODWIN, G.M. — "Application of strain analysis to sheet metal forming problems in the press shop". La Metallurgia Italiana, n.º 8, (1968).

THERMAL NOISE IN SINGLE INJECTION SOLID STATE CYLINDRICAL DIODE WITH THERMAL FREE CARRIERS

S. A. HUSAIN*
Y. K. SHARMA*
N. K. SHARMA*

The analytical expressions for the thermal noise have been evaluated for the single injection current flow in solid state cylindrical diode with thermal free carriers. The regional approximation and salami methods are applied to obtain the results. It is shown that the thermal noise is suppressed by the space charge.

1. INTRODUCTION

The studies on the electrical conduction and noise behaviour for different current flow geometries have been made from a long time [1-5]. The presence of various physical parameters plays an important role on the space-charge-limited current flow in insulators. The scattering of current carriers with the lattice imperfections gives the thermal noise across the diode. The thermal noise is generated in the complete range of current-voltage characteristic which is modulated in the presence of various physical parameters. The geometry of the diode is important for the magnitude of the current flow. Therefore, the thermal noise has been estimated in the cylindrical diode with thermal free carriers. The effects of space charge on the current injection and thermal noise have been studied with the help of regional approximation and salami methods, respectively. It may be noted that the thermal free carriers contribute to the current flow but not to the space charge.

* Department of Physics, R.B.S. College, Agra, India.

Original recebido para publicação em 5/3/85

2. CURRENT INJECTION

Let us consider a single injection solid state cylindrical diode which contains a significant density of thermal free carriers n_o. The general equations for the current flow and Poisson's law for the problem are given by

$$I = 2\pi e \mu r n(r) E(r) \tag{1}$$

$$\left(\frac{\epsilon}{e}\right) \frac{1}{r} \frac{d(rE)}{dr} = n(r) - n_o \tag{2}$$

where I is the current per unit length of the cylinder, e the magnitude of the electronic charge, μ the free electron drift mobility, E the electric field intensity, n(r) the concentration of free carriers at radial distance r, ϵ the permittivity of the insulator and r the radial distance inside the insulator varying from cathode radius r_c to anode radius r_a.

The insulator is divided into two separate regions with the help of regional approximation method [1-3]. The region I is space-charge-limited and the region II is Ohmic. These regions are well separated by the imaginary transition plane r_x. The general equations for both the regions are obtained as

Region I ($r_c \leqslant r \leqslant r_x$):

$$I = 2\pi e \mu r n(r) E(r) \tag{3}$$

$$\left(\frac{\epsilon}{e}\right) \frac{1}{r} \frac{d(rE)}{dr} = n(r) \tag{4}$$

Region II ($r_x \leqslant r \leqslant r_a$):

$$I = 2\pi e \mu n_o r E(r) \tag{5}$$

$$\left(\frac{\epsilon}{e}\right) \frac{1}{r} \frac{d(rE)}{dr} = O \tag{6}$$

where r_x is the transition plane at which the thermal free carriers are equal to the injected carriers. The voltage applied across the insulator is given by

$$V = \int_{r_c}^{r_a} E(r)\, dr \tag{7}$$

3. THERMAL NOISE IN THE DIODE

The thermal noise is generated in the complete range of current-voltage characteristic. The expressions are evaluated with the help of results obtained for the current injection. The salami method of noise calculation [4, 5] has been applied in this section. The whole insulator is divided into small slabs by the concentric cylinders. The noise source for thermal noise is present in each and every section of the diode. The thermal noise is estimated in one slab of the insulator. The integration from cathode radius to anode radius gives the total amount of thermal noise present in the insulator.

According to Van der Ziel [4, 5], the mean square noise voltage in a frequency interval $\triangle f$ is given by

$$\overline{v^2} = 4kTR \triangle f \tag{8}$$

where

$$R = \frac{V}{I} \tag{9}$$

In the above equations, k is the Boltzmann's constant, T the lattice temperature and R the D.C. resistance of the diode. The thermal noise is estimated in the complete range of current-voltage characteristic as given in order:

a) — Low Injection Level:

The injection level is very low, therefore the region II is only present in the insulator. The current--voltage characteristic of this regime is derived from equations (5) and (7) as

$$I = 2\pi e \mu n_o \left[\ln\left(\frac{r_a}{r_c}\right)\right]^{-1} V \tag{10}$$

The noise resistance of the diode at low injection level is obtained from equations (9) and (10)

$$R = \frac{\left[\ln\left(\frac{r_a}{r_c}\right)\right]}{2\pi e \mu n_o} \tag{11}$$

From equations (8) and (11), the thermal noise in the cylindrical diode at low injection level is given by

$$\overline{v^2} = 4kT \frac{\left[\ln\left(\frac{r_a}{r_c}\right)\right]}{2\pi e \mu n_o} \triangle f \tag{12}$$

b) — Medium Injection Level:

Both the regions I and II are present in the insulator. The current-voltage characteristic of the diode at medium injection level is derived from the equations (3) — (7)

$$V = \frac{I}{2\pi e \mu n_o} + \frac{e n_o r_c^2}{2\epsilon} - \frac{3}{2} r_c \left(\frac{I}{2\pi\epsilon\mu}\right)^{1/2} + \frac{I}{2\pi e \mu n_o}\left[\ln\left\{ e n_o r_a \left(\frac{2\pi\mu}{\epsilon I}\right)^{1/2}\right\}\right] \tag{13}$$

which directly gives the noise resistance of the diode as

$$R = \frac{1}{2\pi e \mu n_o} + \frac{e n_o r_c^2}{2\epsilon I} - \frac{3}{2} r_c \left[\frac{1}{2\pi e \mu I}\right]^{1/2} + \frac{1}{2\pi e \mu n_o}\left[\ln\left\{ e n_o r_a \left(\frac{2\pi\mu}{\epsilon I}\right)^{1/2}\right\}\right] \tag{14}$$

The mean square noise voltage for this transition regime is given by equation (8) where R follows from equation (14).

c) — High Injection Level:

Only the space charge region I is present inisde the insulator. The current-voltage characteristic of pure space charge current is derived from equations (3), (4) and (7) as

$$I = 2\pi\epsilon\mu \left[\frac{V}{r_a + \frac{r_c}{2}\left(\frac{r_c}{r_a}\right) - \frac{3}{2} r_c}\right]^2 \tag{15}$$

The noise resistance of the diode is evaluated from equation (15) as

$$R = \frac{1}{2\pi\epsilon\mu V}\left[r_a + \frac{r_c}{2}\left(\frac{r_c}{r_a}\right) - \frac{3}{2}r_c\right]^2 \qquad (16)$$

The mean square noise voltage for space charge regime may be evaluated from equations (8) and (16)

$$\overline{v^2} = \frac{2kT\triangle f}{\pi\epsilon\mu V}\left[r_a + \frac{r_c}{2}\left(\frac{r_c}{r_a}\right) - \frac{3}{2}r_c\right]^2 \qquad (17)$$

which reveals that the thermal noise is inversely proportional to the applied voltage in the space--charge-limited current flow in single injection solid state cylindrical diode with thermal free carriers.

4. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

In the present analysis, the expressions for thermal noise have been evaluated for the three current--voltage regimes of single injection solid state cylindrical diode with thermal free carriers. The expression of thermal noise at low injection level shows that the noise is a constant quantity in Ohmic regime where the current is directly proportional to voltage. The effect of thermal free carriers appears in the medium injection level of current where both the regions are present in the insulator. The thermal noise decreases from the higher value which is obtained at low injection level. The thermal noise decreases rapidly at high injection level because the thermal noise is inversely proportional to the applied voltage in space charge regime. The thermal noise is suppressed by the injected carriers because the concentration of thermal free carriers is compensated by the injected current carriers. The important result of the present work is that the space charge suppresses the thermal noise.

REFERENCES

[1] KAO K. C. and W. HWANG, 1981. Electrical Transport in Solids. Pergamon Press, New York.

[2] LAMPERT M. A. and P. MARK, 1970. Current Injection in Solids. Academic Press, New York.

[3] SHARMA, Y. K., 1982. J. Appl. Phys. 53, 1341.

[4] VAN DER ZIEL A., 1966. Solid State Electronics, 9,. 899.

[5] VAN DER ZIEL A., 1970. Proc. IEEE. 58, 1178.

TRANSITIONS BETWEEN EQUILIBRIUM CONFIGURATIONS IN A SOLID-LIQUID SYSTEM

PAULO CARREIRA*
M. AMARAL FORTES**

RESUMO

As possíveis configurações de equilíbrio de um sistema compreendendo corpos sólidos e um líquido são classificadas em termos do número e tipo de regiões líquidas. Quando se atingem determinadas configurações críticas, ocorrem transições no sistema, as quais originam diferentes regiões líquidas. As transições podem resultar quer do contacto de regiões líquidas (entre si, ou com os sólidos) quer de «ultrapassagem» do limite de estabilidade de uma dada região. Com base em argumentos termodinâmicos e dinâmicos simples, prevê-se a configuração final no caso de um sistema com simetria cilíndrica, na ausência da gravidade. Nas transições por contacto, a configuração final depende fundamentalmente da curvatura das superfícies líquidas que contactam; e os estados intermédios na transição, considerados como estados de equilíbrio, têm valores decrescentes da energia de Helmholtz.

O grau de conexão do líquido diminui, em regra, nas transições por contacto mas pode aumentar nas transições por «ultrapassagem» do limite de estabilidade.

ABSTRACT

The equilibrium configurations of a system comprising solid bodies and a liquid are classified in terms of the number and type of the liquid regions. At particular critical configurations, transitions occur that lead to different liquid regions. The transitions may be produced by contact of liquid regions or by overshoot of the stability limits of a region. The final configuration is predicted from simple dynamic and thermodynamic arguments for a system with cylindrical symmetry, in the absence of gravity. In contact transitions the final configuration depends essentially on the curvature of the fluid interfaces in contact and is reached through a path of decreasing equilibrium Helmholtz energy. The degree of connection of the liquid generally decreases in contact transitions but may increase in overshoot transitions.

1 — INTRODUCTION

A closed system comprising given volumes of two immiscible fluids and solids of a given geometry may

* Laboratório Nacional de Engenharia e Tecnologia Industrial (LNETI) — Paço do Lumiar, Lisboa.
** Departamento de Metalurgia, Instituto Superior Técnico; Centro de Mecânica e Materiais da Universidade Técnica de Lisboa (CEMUL). Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa.
Original recebido para publicação em 23/04/85.

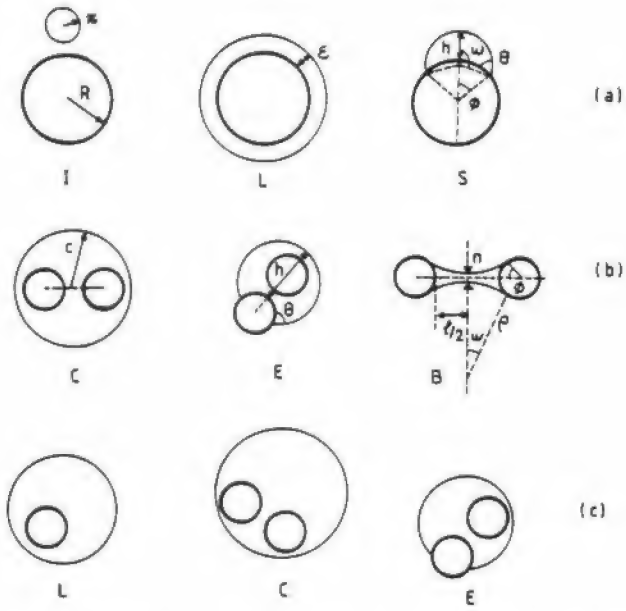


Fig. 1 — Types of liquid regions in one-rod (a) and two-rod (b) systems. Non-symmetric regions are examplified in (c)

admit several alternative equilibrium configurations, each corresponding to a particular distribution of the two fluids. It will be assumed that one of the fluids is a liquid and the other is a vapour surrounding the liquid and solids; the surrounding fluid may as well be a second, immiscible liquid. In the following discussion, only configurations in which this fluid is simply connected and the solids are bounded by convex surfaces will be considered.

Each equilibrium configuration of the system is characterized by the degree of connection, c, of the liquid and by the type of the simply connected volumes of liquid, or *liquid regions* (see examples in Fig. 1). These liquid regions can be classified in terms of two integers n_i and n_c, respectively defined as the number of solids completely immersed in the region and the number of solids partly wetted or contacted by the region. For example, for an isolated drop $n_i = n_c = 0$; for a sessile drop $n_i = 0$, $n_c = 1$; for a liquid bridge between two solids, $n_i = 0$, $n_c = 2$; for a liquid layer on a solid, $n_i = 1$, $n_c = 0$. It is also necessary to specify which solids are immersed or contacted by the region. Configurations differing only in the volume of liquid in each region or in its location, but with the same number and type of regions, will be termed similar configurations. In Appendix 1 it is shown that the number of non-similar liquid regions in a system with n solids is 3^n. This number is reduced to $(n + 1)(n + 2)/2$ if the solids are treated as undiscernible; for example, a single drop on a solid may be counted as n regions or just as one region. As the degree of connection, c, is allowed to increase, the number of configurations rapidly increases. For example, for two solids ($n = 2$) the numbers are as follows: $c = 1$: 9 and 6; $c = 2$; 20 and 13; $c = 3$: 34 and 21; $c = 4$: 53 and 32.

We shall distinguish between two types of equilibrium configurations. In normal configurations, the equilibrium is stable in all regions and there is no contact of interfaces in a region or between different regions. As the relative positions of the solids and liquid regions are changed, or the volume of liquid in a region is altered, starting at a normal configuration, a critical configuration may occur. This is the other type of configurations, examplified in Fig. 2. A critical configuration may result when two or more interfaces come in contact, such as two drops in contact, or when a continuous sequence of stable

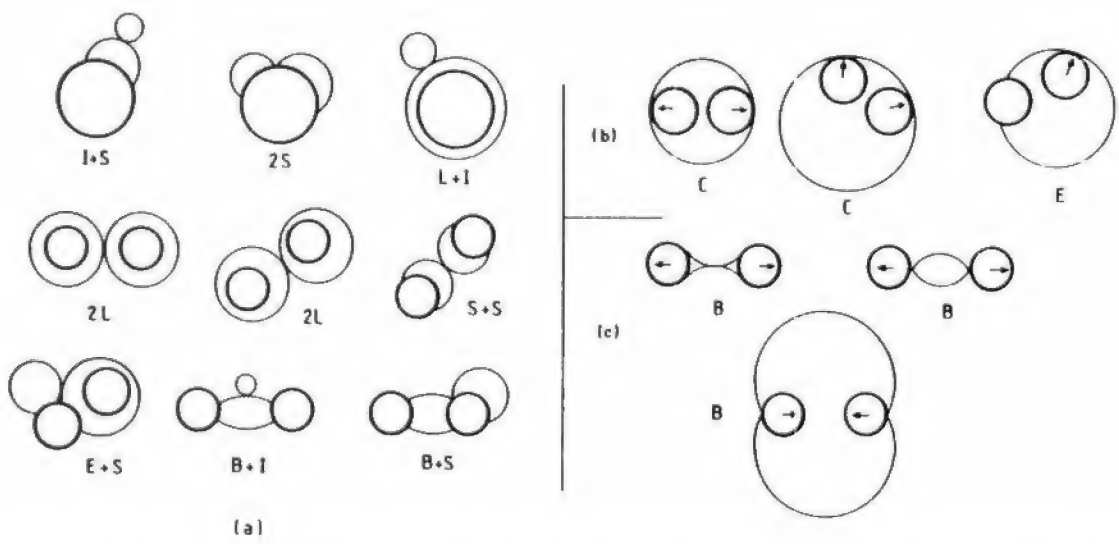


Fig. 2 — Examples of critical configurations which lead to contact transitions (a, b) or overshoot transitions (c). The arrows indicate the direction of displacement of the rods to induce the transition

equilibrium configurations leads to a limiting configuration which is unstable. A very well-known example is the limiting configuration of a pendent drop, just before detachment. Another example, more relevant to the following discussion, is the configuration of a bridge in which a line or point singularity (neck), due to contact of the fluid interfaces, appears in the bridge when the separation of the two solids reaches a critical value. The critical configurations due to contact of interfaces can be classified according to the interfaces that come in contact. The possibilities are LV-LV, LV-SV and LV-SL, where S, L and V denote the solid, liquid and second fluid (vapour) phases.

The critical configurations may be stable or unstable. One of the topics that will be discussed in this paper is the stability of critical configurations. When a critical configuration is unstable, a new equilibrium configuration will result if the system is perturbed. The other main topic is the prediction of this final configuration. This is a dificult problem, which has not been solved even for the simple case of drop detachment.

Ii is convenient to classify the transitions into two classes: contact transitions, when the critical unstable configuration is produced by contact of two different regions; and overshoot transitions, when the stability limit of a single region is reached.

Examples of phenomena where these transitions are relevant are the coallescence and breaking of liquid drops on a solid surface and the formation and rupture of liquid bridges. Related practical areas include wetting, drop detachment, adhesion, powder technology, emulsion stability and cell fagocitosis.

This paper contains a detailed analysis of the equilibrium configurations and of the transitions at critical configurations in a simple system with cylindrical symmetry and comprising two equal rods of circular cross-section. Gravity will be neglected. The treatment of this system is greatly simplified by the fact that the cross-section of the fluid interface is circular for all types of liquid regions. The analysis of systems with more common simple geometries (e.g. two spherical particles) is considerably more complex. A similar study has already been undertaken for two parallel plates with cylindrical symmetry [1].

2 — CONFIGURATIONS AND GENERAL EQUATIONS

The system includes one or two circular rods of radius R and length L, with parallel axes, and a volume V of liquid. The system is bounded by two parallel plates, at a distance L, such that the angle of contact of the liquid with the plates is 90°. All liquid regions contact and are bounded by these two plates. The 90° angle of contact ensures the required cylindrical symmetry of the liquid regions. For example, what will be termed as an isolated drop is in fact a cylindrical volume of liquid between the two plates, i.e. a liquid bridge between the plates. This artifice in the definition of the system to include the two side plates is similar to that previously used in studies of pendent drops [2] and of liquid bridges between rough plates [3], both with cylindrical symmetry. On the other hand, by reducing the separation L we can always avoid problems of instability of the liquid regions in relation to configurations without cylindrical symmetry [2]. We also note that the contribution of the plates to the free energy is constant, independent of the wetted area in them, which is a consequence of the 90° contact angle.

The contact angle, θ, of the liquid with the rods (in contact with the second fluid) is assumed to be a characteristic of the system and related to the interfacial tensions γ_{SV}, γ_{SL} and γ (the fluid interfacial tension) by Young's equation

$$\cos\theta = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma} = \xi. \tag{1}$$

When the quantity ξ is outside the interval $(-1,1)$, a contact angle cannot be defined and some types of liquid regions (e.g. sessile drops) are ruled out.

In a system with one rod only, the types of equilibrium liquid regions are indicated in Fig. 1a: isolated drop (I), layer (L) and sessile drop (S). When the system comprises two rods, additional types can occur (Fig. 1b): liquid bridge (B), rod enclosed in a sessile drop (E) and connecting layer (C). The regions L, E and C may be symmetrical (if they have maximum symmetry) as in Fig. 1a, b, or non-symmetrical as in the examples of Fig. 1c. Bridges always admit two planes of symmetry.

The multiply connected configurations, examplified in Fig. 2, will be indicated by specifying the component regions, for example, I + S, 2I, B + S, E + S. When ambiguity occurs, such as for two S in a two-rod system, the notation 2S indicates that the two drops are on the same rod, while S+S means that they are on different rods. When $|\xi| > 1$, the regions B, S and E are not possible.

For each configuration we shall calculate the Helmoltz energy per unit lenght along the cylindrical axis of the system. Since we are only interested in comparing energies of equilibrium configurations with the same volume of liquid and at the same temperature, it is enough [4] to calculate the Helmholtz energy terms, A', due to the interfaces with the rods and to the fluid interface:

$$A' = \Omega_{SV}\,\gamma_{SV} + \Omega_{SL}\,\gamma_{SL} + \Omega\,\gamma \tag{2}$$

where the Ω are the areas of the interfaces per unit length (Ω refers to the fluid interface). But $\Omega_{SV} + \Omega_{SL}$ is a constant for a particular system, so that we may obtain the Helmholtz energy per unit length from

$$A = \gamma(\Omega - \xi\,\Omega_{SL}). \tag{3}$$

This equation shows that the value of A for any configuration in a one- or two-rod system can be obtained by addition of the A values of the component regions.

In Table I are indicated the main geometrical characteristics of each liquid region, including the interfacial areas that enter in eq. 3. The definition of the geometrical parameters is given in Figs. 1a, b: r is the radius of I, ε the thickness of a symmetrical L, h the height of S or E, c the radius of C and ℓ the distance between the rod surfaces; ρ is the radius of curvature of the fluid interface in S and B regions; ϕ is the wetted arc on a rod, ω is the arc subentended by the fluid interface in S or B (in bridges, ρ and ω have the same sign; $\rho > 0$ means that the centre of curvature is in the side of the liquid); finally, n is the neck width of a bridge.

All linear dimensions will be expressed in units of R, the rod radius, and denoted by an asterisk, e.g.,

$$\rho^* = \frac{\rho}{R};\ \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{R};\ \ell^* = \frac{\ell}{R};\ \text{etc.} \tag{4}$$

The volume per unit length is expressed in units of πR^2, the volume of the rod per unit length,

$$V^* = \frac{V}{\pi R^2}. \tag{5}$$

Finally, the reduced Helmholtz energy, A^*, per unit length is defined by

$$A^* = \frac{A}{2\pi\gamma R} = \Omega^* - \xi\Omega^*_{SL} \tag{6}$$

where

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{2\pi R};\ \Omega^*_{SL} = \frac{\Omega_{SL}}{2\pi R} \tag{7}$$

are the reduced areas.

The limits of geometrical possibility of each liquid region are also indicated in Table I. The limits for L, C and E configurations given in Table I apply to the symmetrical configurations. The maximum ℓ^* for a bridge with given V^* corresponds to $n^* = 0$ for $\theta < 90°$ and to $\phi = 0$ for $\theta > 90°$; the minimum ℓ^* may be zero or occur for $\phi = 180°$ when $\theta < 90°$. At constant ℓ^*, the extreme volumes for B are as follows: for $\theta < 90°$, minimum $n = 0$, maximum $\phi = 180°$; for $\theta > 90°$, minimum $\phi = 0$, maximum $V^* = \infty$ (for $\phi = 270° - \theta$). For $\theta = 90°$ and constant V^*, ℓ^* may

TABLE I

GEOMETRICAL PROPERTIES OF LIQUID REGIONS

Region	Reduced radius	Volume V^*	Area liquid/fluid Ω^*	Area solid/liquid Ω^*_{SL}	Height; other relations	Range of existence
I isolated drop	r^*	r^{*2}	r^*	0	$2\,r^*$	$r^*>0$
L layer	$1+\varepsilon^*$	$\varepsilon^*(\varepsilon^*+2)$	$1+\varepsilon^*$	1	ε^*	$\varepsilon^*>0$
S sessile drop	$\rho^* = \frac{\sin\phi}{\sin\omega}$	$\pi V^*_S = \rho^{*2}\omega + \rho^*\sin\theta - \phi$	$\frac{\rho^*\omega}{\pi}$	$\frac{\phi}{\pi}$	$h^*_S = \frac{\sin\theta}{\sin\omega} + \rho^* - 1$; $\omega = \theta + \phi$	$0<\phi\leqslant\pi-\theta$
C connecting layer	c^*	$c^{*2}-2$	c^*	2		$c^*\geqslant 2+\frac{\ell^*}{2}$
E enclosed rod	as for S	$V^*_E = V^*_S - 1$	as for S	$1+\frac{\phi}{\pi}$	as for S	$h^*_S\geqslant 2$
B bridge	$\rho^* = \frac{\frac{\ell^*}{2}+1-\cos\phi}{\sin\omega}$	$\pi V^*_B = 4\rho^*\sin\omega\,\sin\phi + \rho^{*2}k(\omega) - k(\phi)$; $k(\alpha) = 2\alpha - \sin 2\alpha$	$\frac{2\rho^*}{\pi}\,\omega$	$\frac{2}{\pi}\,\phi$	$\theta+\phi-\omega=\pi/2$; $n^* = \sin\phi + \rho^*(1-\cos\omega)$	$\ell^*\geqslant 0$; $n^*\geqslant 0$; $-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi/2$; $\phi\leqslant\pi$ if $\theta<\pi/2$; $\phi\leqslant\frac{3\pi}{2}-\theta$ if $\theta>\pi/2$

vary between 0 and ∞; and for constant ℓ^*, V^* may vary between 0 and ∞. Fig. 3 gives the extreme values of B for three values of θ. For $\theta < 90°$ there are two curves in Fig. 3, respectively for the maximum ℓ^* or minimum V^*.

In bridges it may also be required to know the force F (per unit length) that has to be applied to the rods to keep equilibrium. This force is the sum of a surface tension force and a pressure difference force [5]:

$$F = 2\gamma \left(\cos\omega - \frac{\sin\phi}{\rho^*}\right). \tag{8}$$

It can also be obtained from the slope of the curve $A^*(\ell^*)$ at constant V^* [5]:

$$F^* = \frac{dA^*}{d\ell^*} = \frac{F}{2\pi\gamma}. \tag{9}$$

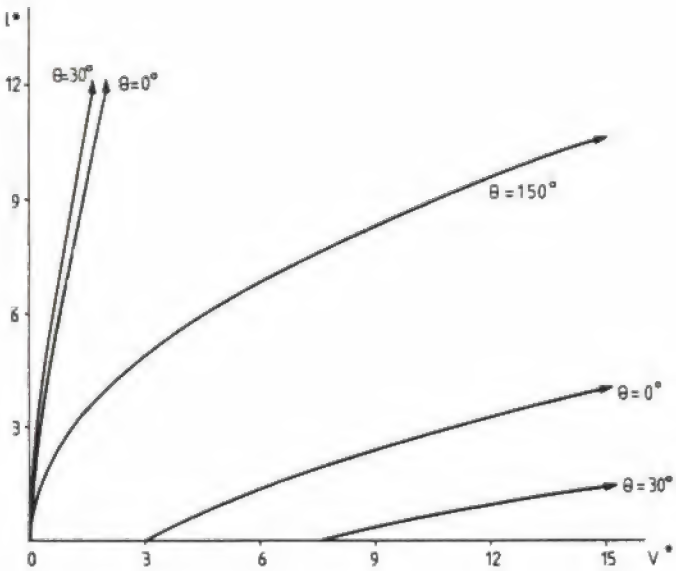


Fig. 3 — Limits of geometrical possibility of liquid bridges for various values of the contact angle

3 — HELMHOLTZ ENERGY OF CONFIGURATIONS

Curves of the Helmholtz energy, A^*, as a function of V^* can easily be prepared for each type of region, and for selected values of θ (and ℓ^* in the case of bridges). Examples of such curves for $\theta = 30°$, $90°$ and $150°$ are given in Fig. 4. The curves are of positive slope and concave downwards except for bridges with $\theta < 90°$, in which case a minimum ($F = 0$) followed by an inflection point may occur, as in Fig. 4a.

The value of A^* for any multiply connected configuration can then be calculated from these curves.

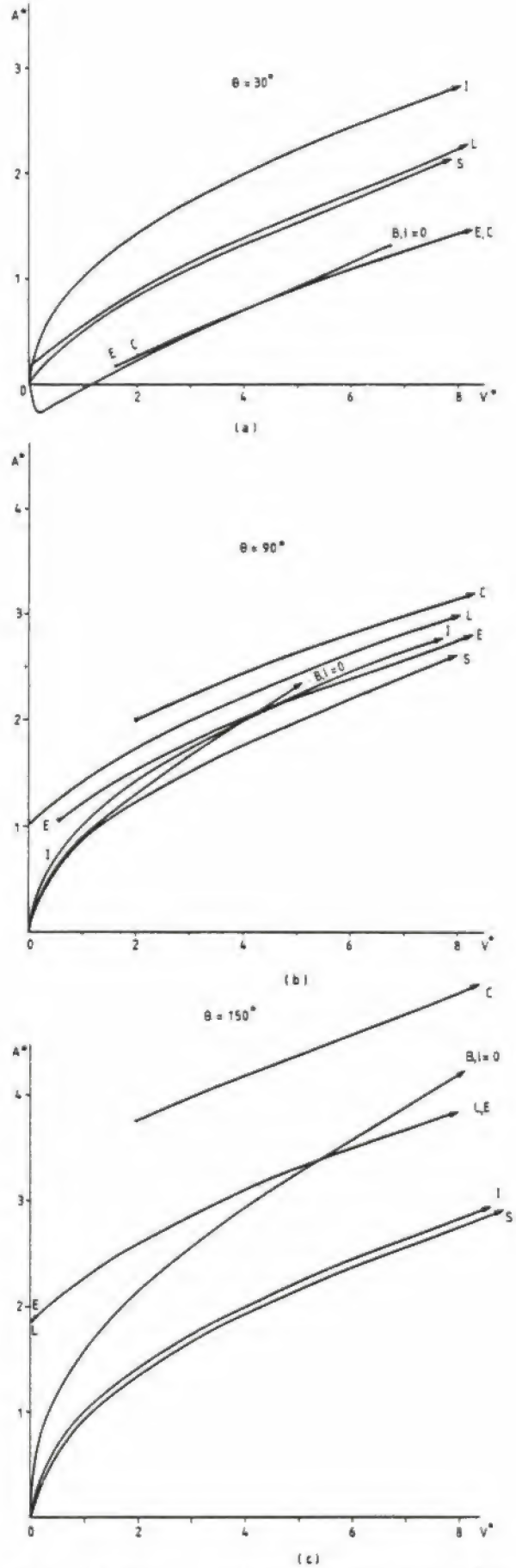


Fig. 4 — Variation of Helmholtz emergy with volume of liquid regions for the contact angles indicated. An arrrow indicates that a curve continues. A dot indicates the extreme value for the region. In (a) the curves E, C are nearly coincident; the same occurs in (c) for the curves E, L; in both cases E is slightly below

Fig. 5 shows examples of the variation of A^* in doubly connected configurations of fixed total volume V^*, as a function of the volume in one of the regions, for $\theta = 30°$. These curves can be obtained by a simple graphical construction from the $A^*(V^*)$ curves for the component regions, as shown in Fig. 5a. For the pairs S + S (or 2S), I + I, 2L, I + C, I + E and S + E the curves are similar in that they have a maximum A^* for a particular composition of the system (i.e. a particular distribution of the total volume between the two regions); for I + L a maximum occurs if $V^* \geq 1$. For the L region, the value of A^* for $V^* = 0$ ($\epsilon = 0$) is taken as the one of a rod with a film of liquid; the value of A^* for the dry rod is larger by $(\cos\theta - 1)$. The energy curves for B + I and B + S are also of this type for $\theta > 90°$. However, for $\theta < 90°$ in addition to the maximum there may be a minimum A^* as in the example of Fig. 5c.

An important property of the stationary points of A^* for doubly connected regions is that they correspond to equal radii of curvature of the fluid interfaces in the two regions. This is obvious from Fig. 5a when the two regions are of the same type (2I, 2L); the proof for the other cases is given in Appendix 2. This property is illustrated in Fig. 5c for the configurations B + I and B + S (with $\ell^* = 0$).

For the purpose of discussing transitions at critical configurations it is also useful to construct curves $A^*(\ell^*)$ at constant V^* and θ, such as those in Fig. 6. The volumes in each region in multiply connected configurations are assumed to be equal. Other configurations could of course be included in Fig. 6. The curves show the range of ℓ^* on the assumption that all configurations are symmetrical. The critical configurations are then reached at the extreme values of ℓ^*. For non-symmetrical configurations the limits of ℓ^* are of course different: the critical configurations may be reached with $\ell^* = 0$ in I, S + S, L, 2L, L + I, L + S, C and E configurations (see Fig. 2a).

From the numerical results examplified in Figs. 4--6 a number of general conclusions can be drawn. A condensed notation is used to compare the energies: for example nI > I means that n isolated drops have higher A^* than a single drop with the same total volume.

One-rod configurations:

1. nI > I
2. nS > S
3. I > S
4. L > S
5. For obtuse θ: L > I. For acute θ, L > I at small volumes, but I > L at large volumes. The critical volume at which I = L is given as a function of θ in Fig. 7a, b.

Two-rod configurations:

6. C > E (C = E for $\theta \to 0$)
7. L > E (L = E for $\theta \to 180°$)
8. For each of the pairs (C, L), (C, I), (C, S), (E, S), (E, I) the relative energies depend on V^* and θ in a way similar to that described above for (L, I). Fig. 7c refers to C = I.
9. The bridges are attractive ($\frac{dA^*}{d\ell^*} > 0$) at large

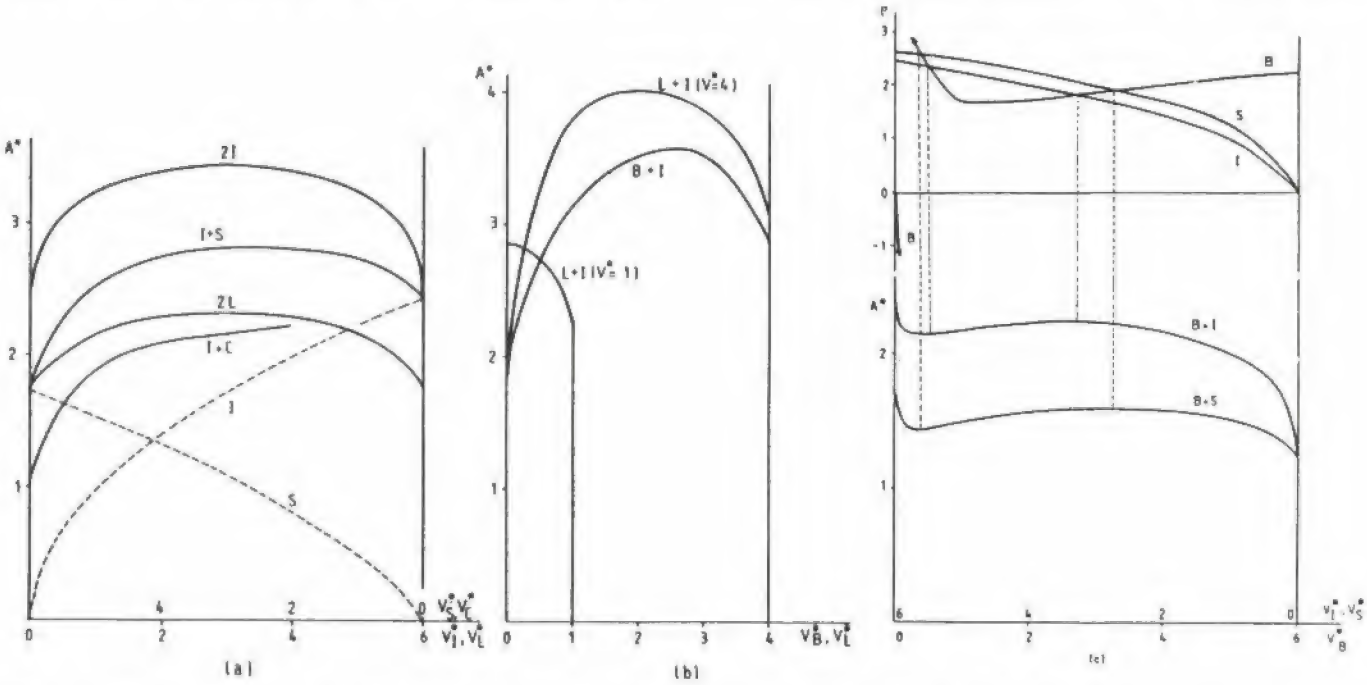


Fig. 5 — Helmholtz emergy in doubly connected configurations as a function of the volumes in each region (θ=30°). The dashed curves in (a) are for the pure regions indicated. In (c) are also shown the radii of curvature of the component regions; the ρ^* curve for B has two branches with a common asymptote. The B configurations is for ℓ^*=0

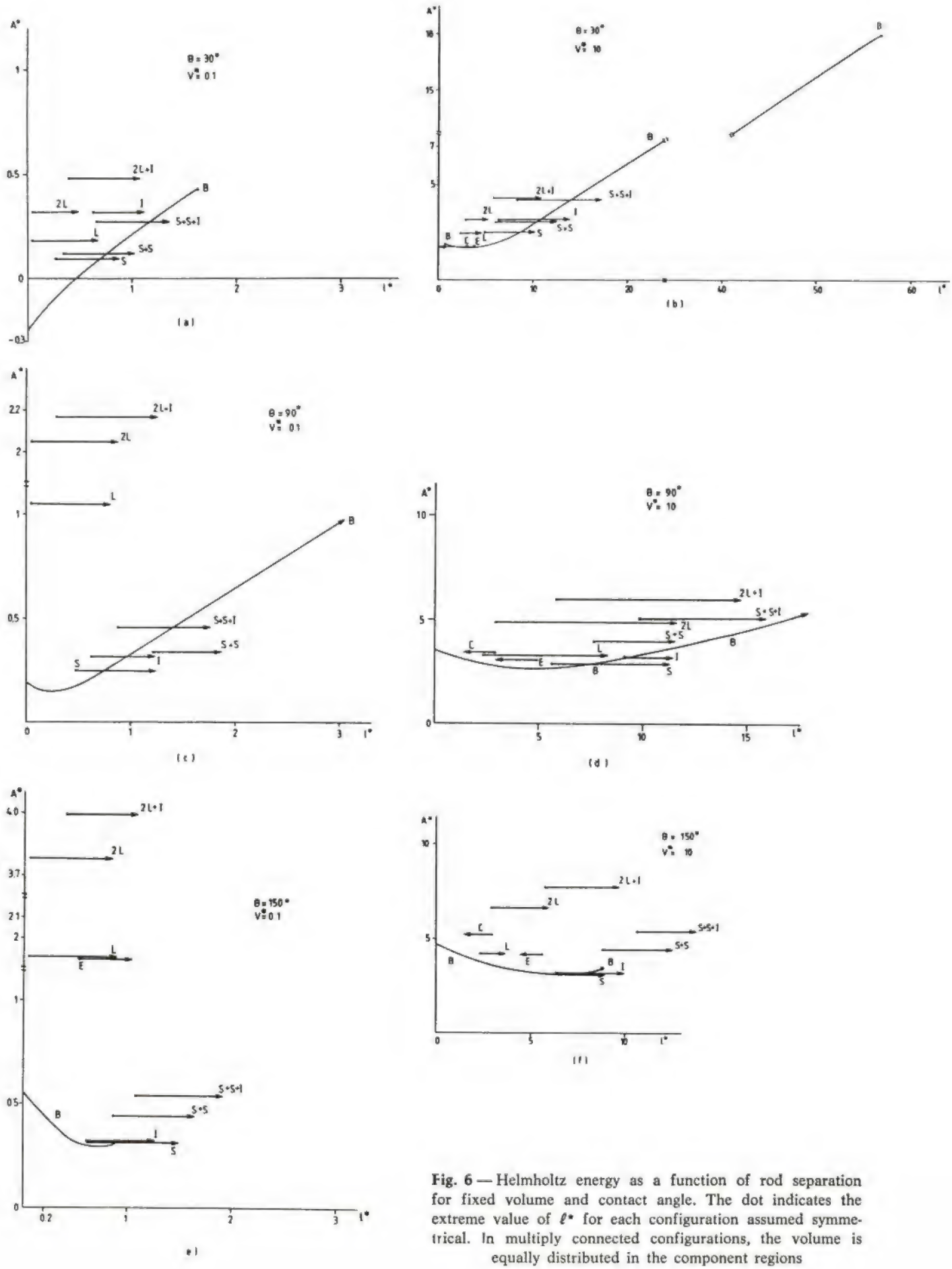


Fig. 6 — Helmholtz energy as a function of rod separation for fixed volume and contact angle. The dot indicates the extreme value of ℓ^* for each configuration assumed symmetrical. In multiply connected configurations, the volume is equally distributed in the component regions

separations and repulsive at small separations, except for small volumes and $\theta < 90°$ in which case they are always attractive (see Fig. 6a).

10. Among all configurations compatible with a given position of the solids and a given volume of liquid, the one with smaller A* is always simply connected. In particular, the smaller A* for configurations with two regions occurs when one of the regions disappears. This is true even if one of the regions is B ($\theta < 90°$) as in Fig. 5c.

4 — STABILITY AND TRANSITIONS BETWEEN EQUILIBRIUM CONFIGURATIONS

It was implicit in the previous analysis that the equilibrium liquid regions are stable in their interval of geometrical possibility, provided they do not come in contact with other regions. This is true even if there are other configurations with smaller A*.

The two classes of critical configurations are illustrated in Fig. 2. Fig. 2a, b shows examples of critical configurations due to contact of interfaces: in (a) the contact is LV – LV and in (b) the contact is SL – – LV. Fig. 2c shows examples of critical configurations that lead to overshoot transitions; these may only occur in bridges, in the system under consideration.

It is now necessary to find out whether the critical configurations are stable or unstable and, in the latter case, predict the new equilibrium state that results from a transition induced by a small perturbation of the system. The critical configurations in liquid bridges are certainly unstable, simply because there is no admissible neighbouring configuration for a separation larger than the critical one. In all other cases, we shall use a very simple argument to decide on stability. The critical configuration is stable if there is no other equilibrium configuration with smaller free energy, A*. If such a configuration exists, it is not possible to decide whether equilibrium is stable or unstable, unless the configuration with smaller A* can be considered as resulting from a small perturbation of the critical configuration, in which case we may conclude for instability.

In order to predict the final state of a transition from an unstable critical configuration, it may be necessary to define precisely the type of perturbation that destroys equilibrium. For example, in overshoot transitions in liquid bridges it is necessary to specify the relative displacement of the rods that perturbs the system. We shall consider symmetrical perturbations, in which the two rods are symmetrically displaced.

In general, the prediction of the final state in a transition will be made by considering the values of A* of the candidate final configurations and invoking what could be termed a continuity argument, i.e. the existence of a continuous path for the system between the initial critical configuration and the final state. Finally, a dynamic argument will also be used for contact transitions, related to the pressure in the liquid regions in contact. The pressure in the surrounding fluid is uniform (P_o), but in each liquid region the pressure, P, will depend on the radius of curvature, ρ, of the interface, according to the equation of Laplace:

$$P = P_o + \frac{\gamma}{\rho}. \tag{10}$$

ρ can be positive or negative (in bridges). When two regions contact, it is expected that, in the transition, the liquid flows from the high pressure to the low pressure region, at least initially. The following examples strongly suggest that the transition occurs in this direction; in some cases the final configuration contains regions with the same liquid pressure, but in general the high pressure region disappears completely.

We shall now apply these principles and arguments to assess the stability of critical configurations and to predict the transitions from unstable configurations. We consider in turn systems with one and two rods.

a) One-rod systems

Only contact transitions occur in such systems.

1. When two or more I contact, a single I results (Fig. 5a). The decrease in A* would also occur if the final configuration contained two drops, one larger and the other smaller than the initial drops. However, it is expected that only one drop results, its position being completely determined from the invariance of the position of the mass centre. It is as if the system would follow a continuous path of equilibrium configurations with decreasing A* and its final configuration corresponds to the minimum A* in the sequence of equilibrium configurations, which, of course, is not the actual path of the system. The actual path could only be determined from a dynamic analysis of the transition, and this type of analysis is extremely difficult.
2. When two or more S contact, a S results. Note that L cannot form, since the wetted arc decreases by coallescence of S drops. The final position of the rod and S cannot be determined from momentum conservation.
3. Contact L, I: the final configuration is L or I

depending on the relative values of the radii of curvature in the initial configuration. It is as if the energy barrier in the curves of Fig. 5b is avoided and the system followed a path of decreasing A^*. For $|\xi| < 1$, when I results, the rod becomes dry. However, for $\xi > 1$ it is expected that a liquid film remains on the rod, because in this case the dry rod would give a total energy larger than the initial one.

4. Contact I, S: analogous to 3. The final configuration is I or S as if the system would follow a path of decreasing A^* (Fig. 5a). If the contact is symmetric, the final position of the rod is determined.
5. Contact S, S: the final state is a single S for the reasons explained in 1.
6. An I drop of reduced radius r^* in contact with the dry rod can, in principle, produce L or S, or be stable. S can only form if $|\xi| < 1$ and always leads to a reduction in energy. For the formation of L, the reduction in energy only occurs for combinations r^*, ξ to the left of the curve in Fig. 7a, b. Intermediate equilibrium states S + I and L + I will in most cases have larger energy than the initial I (Fig. 5a, b). The argument given above in 3. then suggests that the isolated drop is stable in such cases. The exception occurs in the formation of L if the solid is sufficiently wettable. It is easy to show that for $\xi > (2r^{*2} + 2)^{1/2} - r^*$, which implies $\xi > 1$, the initial energy (I + dry rod) is larger than the maximum energy of the intermediate L + I configurations. We expect therefore that in such cases the drop will be unstable leading to the formation of L; otherwise I will be stable. The engulfment of particles by a liquid was discussed by Neumann [6], but he considered only the condition of energy decrease. The present analysis suggests that this necessary condition is not in general a sufficient one.
7. In all cases the degree of connection decreases in the transition; the higher pressure region disappears.
8. When the radii of curvature of the two regions in contact is the same, the configuration is also unstable but the final configuration depends on the way the system is perturbed. For example, in the contact of I and S with equal radii, the following perturbation can be envisaged. A small amount of liquid leaves I, for example; then the radius of I will become smaller than that of S, and more liquid leaves I. And conservely, if the volume of I increases slightly. In both cases the configuration is unstable.

b) Two-rod systems

We consider separately contact transitions and overshoot transitions.

b1) Contact transitions

In addition to the conclusions drawn for one-rod systems we have:

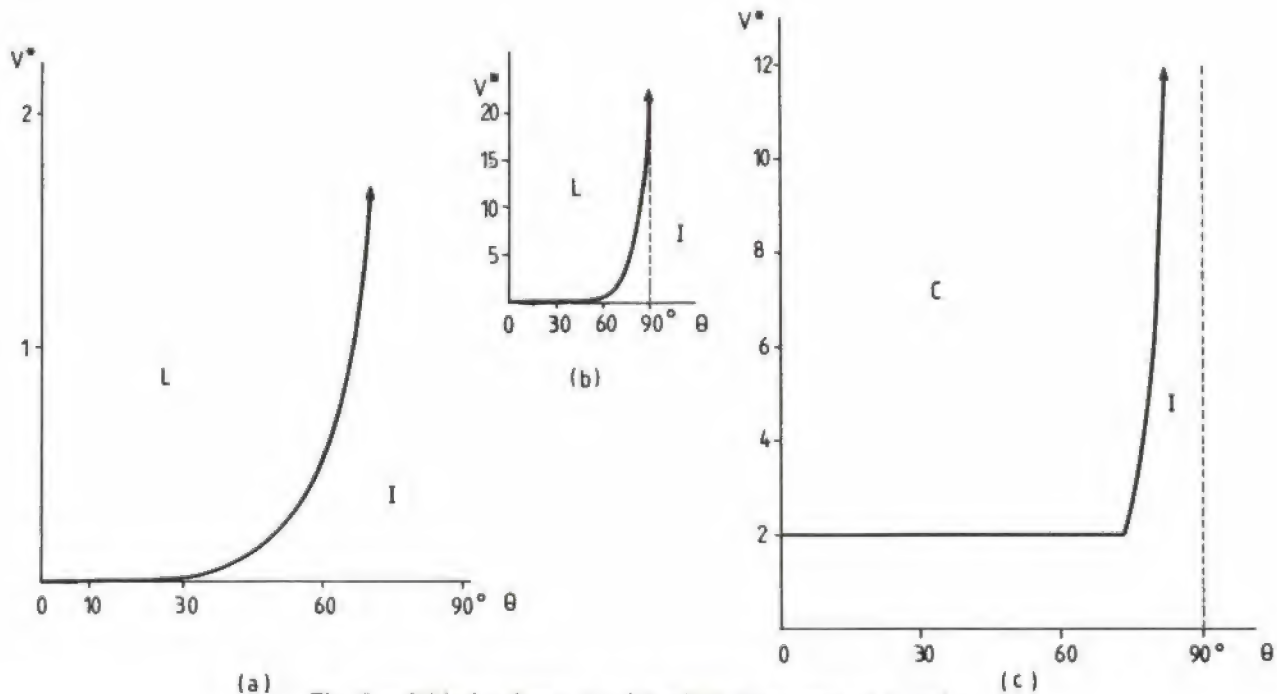


Fig. 7 — Critical volume, V^*, for which the energy of L and I (in a and b) and of C and I (in c) are equal. The more stable region in indicated in each case

9. Contacts I, C and I, E: the final configuration depends on the relative pressures in the initial state. Point 7. applies with the restrictions discussed in 3. as regards the case of $\xi > 1$.
10. Two sessile drops symmetrically placed on each rod (S + S) contact to give B (or C if the volume overshoots the maximum for B). See Fig. 6.
11. Contacts B, I and B, S. When the A*(V*) curve has no minimum (e.g. Fig. 5b), the final configuration is simply connected and can be predicted as discussed in 3. and 6. If the A*(V*) curve shows a minimum (acute θ, not too small volumes) as in Fig. 5c, the final configuration is probably the one of smaller energy that can be reached with decreasing A*. This means that for some initial configurations, a doubly connected configuration will result in the transition, with a composition corresponding to the minimum. The special configuration at the minimum is stable. This is confirmed by an argument such as the one in 8.: the radii change in such a way as to re-establish the original volumes. It is interesting to note that there is no other configuration (with other regions) of smaller A*.
12. When S is contacted by the second rod, the transition is probably to B for symmetrical configurations (Fig. 6). For non-symmetrical configurations it may happen that B cannot result, such as in Fig. 6d-f for $\ell^* \to 0$. In these examples, there is no alternative configuration with lower A*; the contacted S is probably stable.
13. When I is contacted simultaneously by the two rods, similar conclusions apply. B results in the symmetrical case, but otherwise B may have higher energy. S + S or 2L are ruled out as final configurations; they should have equal volumes in the two regions, in which case A* would increase (Fig. 6).
14. When L contacts the second rod, similar conclusions to 12. and 13. apply. If L is not centred and the contact is for small ℓ^*, a B may be forbidden, as in Fig. 6d.
15. When two L contact, similar conclusions apply. B results under symmetrical conditions (equal volumes in 2L and centred L) but may be forbidden under asymmetric conditions and different volumes in each L. Alternative possibilities are C or L.
16. When L and S contact, the result can be B, L or S, depending on the volumes of L and S.
17. When two L (or S + S) contact simultaneously I, under symmetrical conditions, the result is B (Fig. 6).
18. In non-symmetric contacts, C may form instead of B if the total volume is too large (acute θ). For example, if I is very large and contacts simultaneously the two rods at a short distance, C will result (Fig. 6b).
19. Some contacts may be geometrically forbidden. This is the case for the contact of a large I with a bridge of negative curvature. These forbidden contacts do not alter the conclusions in 11.
20. If the maximum separation for C is reached, leading to contact of the rod with the surface of C, B results at least under symmetrical conditions (e.g. Fig. 6b). Otherwise, B may be forbidden and E probably occurs (Fig. 6b). It is however likely that this critical configuration is stable (see below).
21. If the maximum separation for E is reached symmetrically, B results (e.g. Fig. 6d). In non-symmetrical situations B may be forbidden and it is difficult to guess the final configuration. For example, in Fig. 6b there is no configuration with smaller A* than E as $\ell^* \to 0$. This suggests that the E configuration is stable, and the immersed rod can only leave the liquid if a finite amount of energy is supplied.

b2) Overshoot transitions

22. If the maximum separation for B is overshoot symmetrically, the final configuration is I for $\theta > 90°$ (Fig. 6e, f) or S + S with equal volumes for $\theta < 90°$ (Fig. 6a). A non-symmetrical perturbation may lead to other final configurations.
23. If the minimum separation for B is overshoot ($\theta < 90°$, large volumes) a C results (Fig. 6b).

It is concluded, therefore, that liquid-liquid contacts are unstable but other contacts are stable if a contact angle can be defined ($|\xi| < 1$).

When a single region results from a transition, the invariance of the mass centre may be sufficient to determine the position of the region, which is necessarily at rest. In such cases, it is as if the region that survives were attracted by the other region. If two regions result from a contact, their positions and individual momenta remain undetermined.

As referred above, when a B is formed in a transition, forces must be applied to the rods to keep equilibrium. If such forces are not applied, the final configuration can be quite different, in general with a change in ℓ^*. For example, when S + S contact and a B is formed, if forces are not applied to the rods these will move in a direction that depends on whether the force is attractive or repulsive. In the first case the rods will eventually contact, but if the force is repulsive the rod separation may increase initially (the force is always attractive at large distances).

5 — CONCLUDING REMARKS

The method developed in this paper to predict the transitions at critical configurations avoids the description of the irreversible transformation that occurs and is essentially based on a comparison of the properties of the initial and final configurations. The merit of the method is that it rules out some final configurations and leads to simple predictive rules in the case of contact transitions: the final configuration is the one of smaller A^* that can be reached from the initial configuration following a path of decreasing A^* in the diagrams of the type shown in Fig. 5. Finally, the analysis shows that there are stable critical configurations which can only be destroyed if mechanical energy is supplied to the system; these are the configurations resulting from the contact of a dry solid with a drop, or of a wetted solid with a liquid surface, when $|\xi| < 1$.

As pointed out in the Introduction, when a critical configuration is reached in the system discussed in this paper, a line singularity occurs in the surfaces. When the configuration is unstable, a transition takes place to a new configuration with no line singularities. Energy terms associated with these lines should then be included in the free energy of the system and, for the sake of coherency, the energy contributions of all lines of contact between two different surfaces (i. e., the solid-liquid-second fluid lines of contact) should then also be included [e.g. 7]. This would make the analysis much more complicated and general conclusions on stability and transitions could hardly be drawn. However, it is expected that the relative contribution of the line energies will be negligeable when the linear dimensions of the system are not too smal. The conclusions drawn above on the stability of critical configurations and on the final state in a transition should therefore be valid in such systems, but not in those with small dimensions when the contribution of line energies is not negligeable.

Appendix 1 — NUMBER OF CONFIGURATIONS

The number of simply connected liquid regions that may occur in a system with n solids (convex surfaces) is obtained as follows. Each region is characterized by the integers n_i, n_c (≥ 0): the first indicates the number of solids immersed in the region and the second the number of solids partly wetted by the region. The maximum value of $k = n_i + n_c$ is n, and all combinations (n_i, n_c) such that $n_i + n_c \leqslant n$ can occur. For example, for $n = 2$, the pairs (n_i, n_c) are: (0,0) (1,0) (0,1) (2,0) (1,1) (0,2). For a particular pair (n_i, n_c) the number of distinct regions is $k + 1$ if the solids are treated as undiscernible and $\binom{k}{n_i} \cdot \binom{n}{c}$ otherwise; $\binom{n}{k}$, for example, denotes the number of selecting k objects out of n. For example, for $n_i = 3$, $n_c = 1$, there are $\binom{4}{3} = 4$ distinct regions involving any selected 4 solids. If the number of solids is n, the 4 solids can be chosen in $\binom{n}{4}$ ways. The total number of regions in the first case is therefore

$$N_u = 1 + 2 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n + 1)\,(n + 2)}{2}.$$

In the second case, the total number is

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \right] = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

Equations for the number of configurations with higher degrees of connection, c, are hard to obtain. The values given in the text for $c = 2$ were found by writting down all the possible configurations.

Appendix 2 — STATIONARY POINTS IN $A^*(V^*)$ CURVES FOR DOUBLY CONNECTED CONFIGURATIONS

Consider first the configuration S + I. The total volume (cf. Table I)

$$V^* = r^{*2} + \frac{1}{\pi} [\rho^* (\rho^* \omega + \sin\theta) - \Phi] \qquad \text{(A.2.1)}$$

is fixed. r^* and ρ^* are the radii of curvature of I and S, respectively:

$$\rho^* = \frac{\sin\Phi}{\sin\omega}\ ;\ \omega = \theta + \Phi \cdot \qquad \text{(A2.2)}$$

The total A^* is

$$A^* = r^* + \frac{1}{\pi} (\omega\rho^* - \Phi\cos\theta) \cdot \qquad \text{(A2.3)}$$

From $dV^* = 0$ we obtain

$$2\pi r^* dr^* + \left[2\omega\rho^* + \sin\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin^2\omega}{\sin\theta} (\rho^{*2} - 1) \right] d\rho^* = 0 \qquad \text{(A2.4)}$$

If A^* is stationary, $dA^* = 0$, and

$$\pi dr^* + \left[\omega + \frac{\sin^2\omega}{\sin\theta} (\rho^* - \cos\theta) \right] d\rho^* = 0\,. \qquad \text{(A2.5)}$$

Combining A2.4-5 gives

$$2r^* = \frac{2\rho^*\omega + \sin\theta + \frac{\sin^2\omega}{\sin\theta}(\rho^{*2}-1)}{\omega + \frac{\sin^2\omega}{\sin\theta}(\rho^* - \cos\theta)} \cdot \qquad \text{(A2.6)}$$

Simple calculations, using eqs. A2.2, give the final result

$$r^* = \rho^* . \qquad \text{(A2.7)}$$

The stationary point corresponds to a maximum, as explained in the text.

Consider now the configuration B+I. The equations are

$$V^* = r^{*2} + \frac{1}{\pi}[4\rho^* \sin\omega \sin\Phi - 2(\Phi - \sin\Phi\cos\Phi) + 2\rho^{*2}(\omega - \sin\omega\cos\omega)] \qquad \text{(A2.8)}$$

$$A^* = r^* + \frac{1}{\pi}(\rho^*\omega - \Phi\cos\theta) \qquad \text{(A2.9)}$$

with

$$\theta - \omega + \Phi = \pi/2 \,;\, d\omega = d\Phi \qquad \text{(A2.10)}$$

and

$$\frac{\ell^*}{2} = \rho^* \sin\omega + \cos\Phi - 1 \qquad \text{(A2.11)}$$

so that

$$(-\sin\Phi + \rho^*\cos\omega)\, d\omega + \sin\omega\, \rho^* = 0 . \qquad \text{(A2.12)}$$

The conditions $dV^*=0$ and $dA^*=0$ combined with eqs. A2.10-12 give

$$r^* = \rho^* . \qquad \text{(A2.13)}$$

The stationary point may be a maximum or a minimum.

Combining the previous results, it is easy to conclude that for B+S configurations the stationary A^* corresponds to $\rho^*_B = \rho^*_S$.

The same property holds in all other cases, such as 2I, 2S, 2L, L+I, L+S, I+E, I+C and a formal proof can be made on the same grounds.

REFERENCES

[1] M. A. FORTES, Rev. Port. Quim., **23**, 47 (1981).
[2] E. PITTS, J. Fluid. Mech. **59**, 753 (1973).
[3] M. A. FORTES, Colloids and Surfaces, **8**, 361 (1984).
[4] R. E. JOHNSON and R. H. DETTRE, Adv. Chem. Ser. **43**, 112 (1964).
[5] M. A. FORTES, Rev. Port. Quim., **23**, 193 (1981).
[6] A. W. NEUMANN, Adv. Colloid Interface Sci., **4**, 105 (1974).
[7] G. NAVASCUÉS and P. TARAZONA, J. Chem. Phys. **75**, 2441 (1981).

ANÁLISE DOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE CARGAS TÉRMICAS ATRAVÉS DE ESTRUTURAS

L. F. RORIZ*

RESUMO

Neste artigo são discutidos os principais métodos de determinação de cargas térmicas através da estrutura de edifícios, sendo analisados os erros teóricos inerentes a esses métodos.

SUMMARY

An analysis of the three main methods for the evaluation of the thermal load through structures is presented. The methods recommended by Carrier, IHVE and ASRAE respectively, use one of the two fictitious temperatures: the sol-air and the equivalent temperatures. The errors occuring using each method are pointed out, and the general conditions where each method can be used as well as those where each method is advisable are also given.

Carrier method has only the advantage of beeing speedy but its use is not advisable as it can lead to large errors in the calculated load. The use of the ASHARE method is advisable but only for the cases presented in the tables. From all methods the most general with good precision is the IHVE method.

1 - INTRODUÇÃO

Os métodos discutidos neste artigo são os de utilização mais generalizada Estes métodos descritos em [1], [2] e [3] utilizam uma das temperaturas fictícias usualmente designadas por temperatura sol-ar (T_{sa}) e por temperatura equivalente (T_{eq}).

A temperatura equivalente é a temperatura fictícia a que o ar exterior se deverá encontrar de tal forma que o fluxo de calor que atravessa a superfície interior da estrutura, ie, que entra no espaço a climatizar devido à radiação e à diferença real de temperaturas entre o ar exterior e interior é igual ao que entraria nesse espaço a climatizar, em regime estacionário, não havendo radiação e encontrando-se o ar exterior a essa temperatura fictícia. A temperatura sol-ar é a temperatura fictícia a que o ar exterior se deverá encontrar de tal forma que o fluxo de calor que atravessa a superfície exterior da estrutura devido à radiação e à diferença real de temperaturas entre o exterior e o interior, é igual ao que atravessaria essa mesma superfície, não havendo radiação e estando o ar exterior a essa temperatura.

Embora a carga térmica através da estrutura de edifícios seja do tipo sensível e do tipo latente, todos os métodos que são analisados neste artigo apenas consideram a carga sensível. Todos os métodos desprezam também o efeito dos bordos, considerando as superfícies estruturais independentemente. Esta forma de proceder é aceitável pois o erro introduzido é desprezável. Os erros que serão apontados nos diversos métodos referem-se apenas ao método em si, não sendo em qualquer dos casos considerados os efeitos da transmissão de massa quer no valor de carga latente quer no valor da condutividade térmica aparente a utilizar.

Dos três métodos que serão analisados, os que se baseiam, na temperatura equivalente [1] e [3] são de utilização mais simples e rápida que o que se baseia no conceito da temperatura sol-ar [2]. Para os distinguir, os métodos serão designados por métodos Carrier, método IHVE e método ASHRAE.

2 - MÉTODO CARRIER

Neste método a carga térmica é calculada através de

$$Q = AK_t \, \Delta T_{eq} \qquad (1)$$

onde K_t é o coeficiente global de transmissão de calor da estrutura considerada e A é a área da estrutura.

Os erros relativos a este método foram anteriormente discutidos pelo autor [4].

* Professor Auxiliar do IST.
Original recebido para publicação em 12/09/85.

Como então foi referido o fluxo real de calor que atravessa a estrutura durante 24 horas terá que ser igual ao que atravessaria a estrutura em regime estacionário não havendo radiação e estando o ar exterior à temperatura T_{ae}

$$T_{ae} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} \Delta T_{eq_{ij}} + T_{int} = \overline{\Delta T_{eq_j}} + T_{int} = \overline{T_{eq}} \qquad (2)$$

sendo $\Delta T_{eq_{ij}}$ a diferença de temperatura equivalente à hora i para a parede de espessura j. Este valor da temperatura fictícia é independente da espessura da parede e apenas função da orientação e inclinação da superfície em estudo. No entanto tal não se verificar nas tabelas apresentadas em [1]. As diferenças entre os valores máximos e mínimos de $\overline{\Delta T_{eq_{ij}}}$ são apresentadas na Tabela 1, já que tais valores não foram apresentados em [4]. Os valores apresentados foram deduzidos a partir das tabelas originais em°F. Da observação da última coluna da tabela é fácil deduzir que apenas os valores de ΔT_{eq} relativos a terraços em sombra podem ser considerados correctos. Para paredes e terraços ao sol o erro no valor de ΔT_{eq} é de ± 0.6°C e de ± 2.2°C, respectivamente. Por razões de simetria em relação às 12 horas solares, valores de T_{eq} para paredes simétricas em relação à direcção sul deveriam ser os mesmos. Embora para o valor médio ($\overline{\Delta T_{eq}}$) este erro seja pequeno (± 0.1°C) como se pode deduzir da tabela, a utilização dos princípios de simetria e da independência da espessura da parede quando aplicadas simultâneamente a paredes E-W resulta numa diferença máxima de ΔT_{eq} de 2.67°F, sendo portanto este o erro real neste tipo de paredes. Para as restantes orientações o erro obtido é igual ao observado na tabela 1, pelo que os erros reais são para paredes NE e NW de 1.71°F e para as paredes SE e SW de 2.13°F.

Tipo de estrutura	Orientação	$\overline{\Delta T_{eq}}$ (°F)	$\overline{\Delta T_{eq_{(max)}}} - \overline{\Delta T_{eq_{k(min)}}}$ (°F)
Parede	N	3.13	0.95
	NE	9.02	1.08
	E	12.41	2.04
	SE	11.49	0.62
	S	8.81	0.83
	SW	11.19	2.13
	W	12.66	1.96
	NW	8.92	1.71
Terraço ao Sol	—	20.03	7.75
Terraço à sombra	—	3.01	0.08

TABELA 1

Em termos percentuais o erro nos valores tabelados de ΔT_{eq} pode ser superior a 100%.

A utilização das fórmulas de correcção propostas em [1] e os erros introduzidos nas diversas correcções foram também discutidos em [4].

Estes erros situam-se duma forma geral dentro do erro com que são apresentadas as tabelas excepto para estruturas ligeiras (telhados, paredes finas, etc.). Neste tipo de estruturas e principalmente em telhados, os erros inerentes a este método podem ser bastante elevados. Nestas condições a utilização deste método não é pois aconselhável.

3 - MÉTODO IHVE

Neste método a carga térmica à hora H + Ø é dada por

$$Q_{H+\varnothing} = K_t A \left[\overline{T_{sa}} - T_{int} + f\,(T_{saH} - T_{sa})\right] \qquad (3)$$

sendo $\overline{T_{sa}}$ a temperatura sol-ar média diária, Ø o desfasamento ou atrazo e f o factor decremental ou de amortecimento.

Esta equação é deduzida a partir da equação geral

$$Q = K_t A \left[T_{sa} - T_{int} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n c_n \cos\left(\frac{n\pi}{12} t - \Psi_n - \varnothing_n\right)\right] \qquad (4)$$

em que $T_{sa} = \overline{T_{sa}} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\pi t / 12 - \Psi_n)$ e em que f_n e $\varnothing_n$ são o factor decremental e o atrazo referente à $n^{\text{ésima}}$ harmónica.

A utilização da equação (3) apenas considera a harmónica principal. O erro desta aproximação depende portanto da aproximação com que uma única harmónica consegue descrever a evolução da temperatura da superfície exterior ao longo do dia.

Como o período de oscilação (ou mais própriamente dois semi-períodos diferentes) influenciam os valores do atrazo e do amortecimento, estes valores deveriam ser determinados em função da orientação e inclinação da estrutura. No entanto de acordo com [2] o factor decremental é considerado como função da espessura e densidade do material, enquanto que o atrazo é considerado como dependente exclusivamente da espessura do material. Esta simplificação introduz um erro bastante pequeno no valor do amortecimento, (< 10%), mas tal não acontece com o tempo de atrazo. Para paredes NE os semi-períodos são cerca de 4 e 20 horas e nestas paredes os atrazos calculados de acordo com [2] diferem em mais de 50% dos atrazos reais produzidos. Para paredes SE este erro pode ser da ordem de 30%, como se pode ver na Fig. 1. Nesta, os valores do atrazo indicados referem-se a paredes de cor escura, para as principais orientações. Foram obtidos através da solução numérica da equação do calor considerando uma variação térmica diária de 24 a 35°C, a radiação solar média do dia 21 de Junho e a velocidade do vento de 12 km/h. A temperatura interior considerada foi de 27°C e as propriedades das paredes eram: ρ = 2600 Kg/m^3, k = 0.72 Kcal/h m°C, C_p = 0.20 Kcal/Kg°C. As espessuras estudadas foram de 0.105, 0.180, 0.285 e 0.345m. O

erro total na utilização do método, é a soma dos dois erros anteriormente citados. Consoante a orientação, estes podem tender a acumular-se ou não. Como se depreende da figura o erro final total é mínimo para paredes SW, W e S (e consequentemente para terraços) e máximo para paredes NE. No entanto este erro tende a aumentar com a espessura da parede. No caso da parede de 0.345 m, onde o valor do atrazo calculado difere, para diversos casos, em mais de uma hora do atrazo real, o amortecimento ($\Delta T_{int}/\Delta Text$) é inferior a 4%. Para o caso de paredes de 0.285 m de espessura o amortecimento é de 6 a 7%. Nestes casos um erro de 2 ou 3 horas no valor calculado do atrazo, não afectará significativamente a carga térmica através da estrutura calculada.

Existe ainda outro erro adicional no cálculo do valor do atrazo. Este erro não resulta do método própriamente dito mas sim do facto de não se ter acesso à hora das temperaturas máxima e mínima da superfície exterior da parede mas apenas à variação da temperatura sol-ar. Há pois que considerar ainda o atrazo devido à convecção. No entanto para as diferentes orientações este valor varia apenas entre 0.3 e 1.2 horas ou seja, para efeitos de cálculos práticos de 0.5 ou 1 hora, consoante o semi-período da oscilação é inferior ou superior a 12 horas.

4 - MÉTODO ASHRAE

Este método calcula a temperatura sol-ar de diversos tipos de estruturas, a partir da qual e utilizando funções transferência, calcula o fluxo de calor por unidade de área que penetra no espaço a climatizar. Com base no valor do coeficiente global de transmissão de calor da estrutura são determinados os valores da diferença de temperatura equivalente, designados em [3] por diferença de temperatura de carga.

Desta forma a carga através da estrutura é neste método obtido utilizando a equação [1]. Os valores foram calculados para uma variação térmica diária: 74 a 95°F (23.3 a 35°C), temperatura interior de 78 °F (25.6°C), latitude de 40°, mês de Julho, considerando as superfícies de cor escura.

Lógicamente a maioria dos erros inerentes aos 2 métodos anteriores são evitados. Uma análise análoga à referida na discussão do método Carrier é apresentada na Tabela 2. Desta forma e utilizando as relações de simetria de orientação em relação ao sul o erro máximo que é permissível deduzir é <0.2°F.

No entanto alguns erros persistem devido às hipóteses formuladas no modelo utilizado para a variação das condições exteriores. De todos o mais importante foi considerar que os valores máximo e mínimo da tempe-

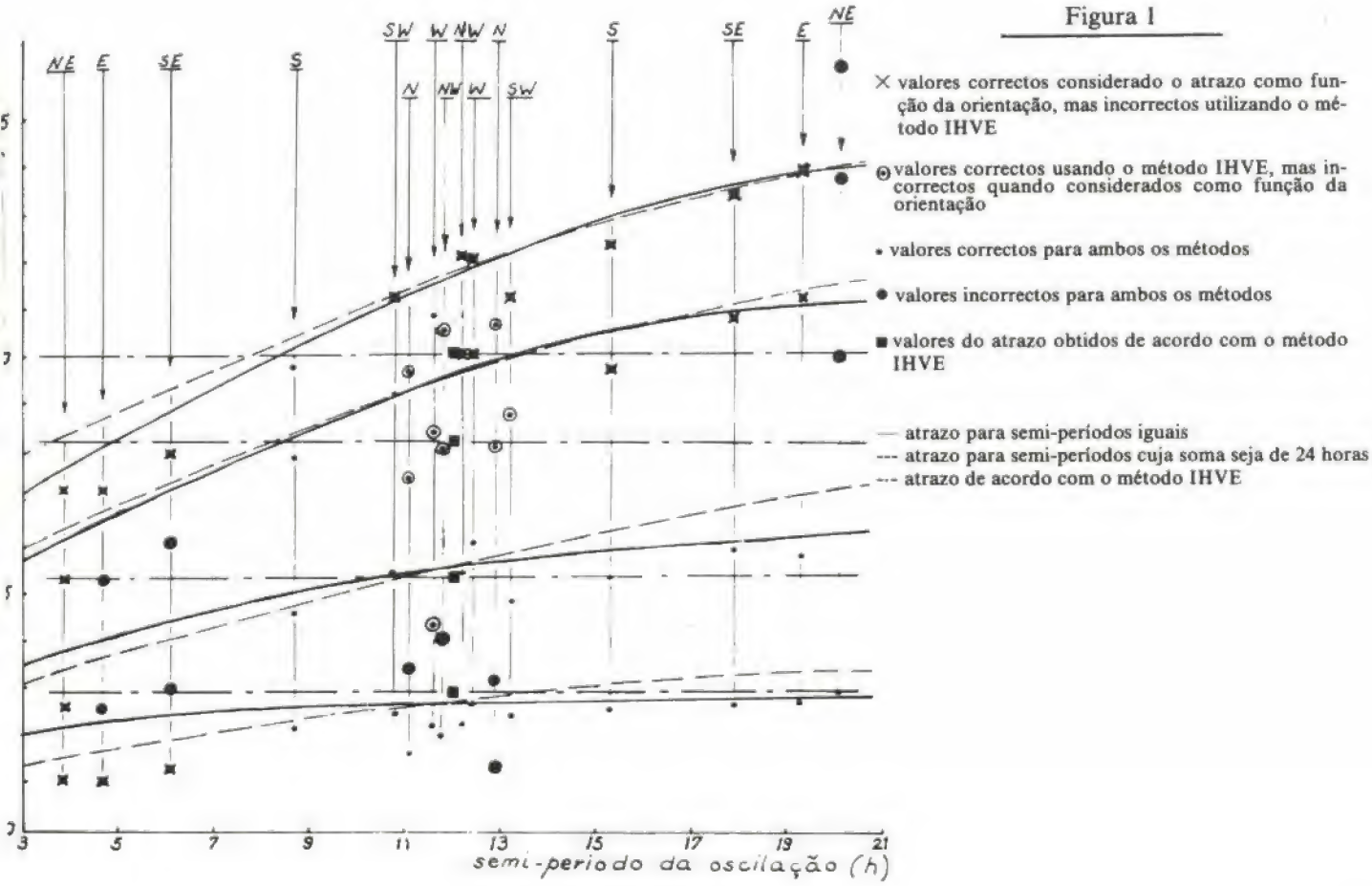


Figura 1

ratura exterior ocorrem sempre às 15.00 e 05.00 horas respectivamente. Dado tal não acontecer, o erro introduzido no amortecimento e sobretudo no atrazo da onda térmica variará com o mês. Os erros por se ter desprezado o efeito do vento e o facto de se considerar radiação difusa apenas entre o nascer e o pôr do sol quando na realidade ela existe entre os dois crepúsculos astronómicos, são pequenos. O erro cometido no 1.º caso é para a grande maioria das estruturas inferior a 5%. O erro cometido no 2.º caso apenas reduz ligeiramente os valores de cargas térmicas que correspondem às horas entre os crepúsculos e o sol atingir o horizonte. A grande desvantagem deste método é que não é geral e está limitado aos casos que foram estudados. No caso de ser necessário calcular a carga térmica em paredes e telhados diferentes dos tabelados não é possível um cálculo correcto da carga térmica, mas apenas obter uma estimativa do valor.

Quando as condições de projecto forem diferentes das que foram consideradas para obtenção dos valores de ΔT_{eq} tabelados, há erros que são introduzidos utilizando as fórmulas de correcção apresentadas em [3]. Destas, a correcção à variação da temperatura exterior, à temperatura interior e à radiação solar durante o ano são análogas às do método Carrier que foram já discutidas em [4]. Para a correcção à cor é apenas apresentado o valor de 0.5 para cor clara o que é demasiado "geral" para todo o tipo de cores. Além disso esta correcção afecta o valor da transferência de calor apenas devido à diferença de temperaturas que é independente da cor. Desta forma a utilização de diversos valores para o factor de correcção da cor não eliminaria totalmente o erro introduzido nesta correcção.

Orientação de Parede	Tipo de Parede	$\overline{\Delta T_{eq}}$ (°F)	$\overline{\Delta T_{eq(max)}} - \overline{\Delta T_{eq(min)}}$ (°F)
NE	A	17.54	0.17
	C	17.71	
	G	17.67	
E	A	22.29	0.13
	C	22.38	
	G	22.42	
SE	A	21.25	0.13
	C	21.38	
	G	21.33	
SW	A	21.21	0.21
	C	21.42	
	G	21.42	
W	A	22.33	0.13
	C	22.38	
	G	22.46	
NW	A	17.54	0.17
	C	17.67	
	G	17.71	

TABELA 2

5 - CONCLUSÃO

Pelo que anteriormente foi dito, dos métodos referidos, o do IHVE é aquele que sendo totalmente geral oferece maior precisão no valor da carga térmica calculada. Para casos gerais a sua utilização é a mais aconselhável. Embora o método Carrier possa ser utilizado se as estruturas não forem ligeiras ou quando a carga térmica através da estrutura tiver um peso bastante pequeno na carga térmica total, é aconselhável o uso do método IHVE dado existirem tabelas de T_{sa} para paredes, terraços e telhados (sendo considerados diversos tipos de cobertura) que tornam este último método bastante expedito. No entanto antes da sua utilização convirá ao projectista verificar se a estrutura que está a considerar está tabelada em [3]. Neste caso a utilização do método ASHRAE é aconselhável.

Bibliografia

1 - Handbook of Air Conditioning System Design — Carrier Air Cond. Co (1965)

2 - I.H.V.E. Guide, Data Book A — The Inst. Heat. Vent. Eng. (1971)

3 - Handbook and Product Directory Fundamentals — A.S.H.R.A.E. (1977)

4 - Análise do método da temperatura equivalente e seu domínio real de aplicação, no cálculo de cargas térmicas-CTAMFUTL 34 (1977)

QUASI-TEM APPROXIMATION FOR THE CURRENT IN A HORIZONTAL WIRE ABOVE GROUND

MICHEL P. CARPENTIER

Departamento de Matemática e Centro de Análise e Processamento de Sinais, Instituto Superior Técnico

ABSTRACT

A very simple approximate formula for the current in a horizontal wire above ground is derived by using the quasi-TEM approximation. This formula can be interpreted as the current in a transmission line equivalent to the structure.

RESUMO

Utilizando a aproximação quase-TEM deduz-se uma fórmula aproximada muito simples para a corrente num fio horizontal em presença da terra. Esta fórmula pode ser interpretada como a corrente numa linha de transmissão equivalente à estrutura.

Consider an infinitely long thin wire of radius a, parallel to the z-axis located at height b above ground and excited by a delta-function generator defined by $V\delta(z)\exp(j\omega t)$. Let n be the ground refractive index given by $n=(\epsilon_2/\epsilon_o - j\,\sigma_2/(\omega\epsilon_o))^{1/2}$ with $-\pi/4 < \arg(n) < 0$, where ϵ_2 and σ_2 are the ground dielectric constant and conductivity, and ϵ_o is the dielectric constant in free space. Let $k_o=\omega(\mu_o\epsilon_o)^{1/2}$ and $Z_o=(\mu_o/\epsilon_o)^{1/2}$ be, respectively, the wave number and the impedance in free space. The current distribution in the wire is given by the integral [1]

$$I(z)=\frac{2k_oV}{\pi Z_o}\int_\Gamma \frac{N(ah)}{D(h)}\, e^{-j\lambda z}\, d\lambda \qquad (1)$$

where Γ is the real axis, $N(ah) = H_1^{(2)}(ah)\,.\,\pi\, ah/2j$ and

$$D(h) = h^2\,[T(h) + Q(h)] + k_o^2\,[P(h) - Q(h)] \qquad (2)$$

where

$$P(h)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j2bu_1}}{u_1+u_2}\,ds\,,\quad Q(h)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j2bu_1}}{n^2u_1+u_2}\,ds\,,$$

$$T(h) = H_o^{(2)}(ah) - H_o^{(2)}(2bh)$$

$u_1 = (h^2 - s^2)^{1/2}$, $u_2 = \{(n^2-1)k_o^2 + u_1^2\}^{1/2}$ with $\mathrm{Im}(u_1)$, $\mathrm{Im}(u_2) < 0$ for real λ and s, h is the transverse wave number given by $h=(k_o^2-\lambda^2)^{1/2}$ with $\mathrm{Im}(h)<0$ for real λ, and $H_m^{(2)}$ is the Hankel function of the second kind and order m.

The integrand of (1) does not make it possible to derive an exact expression for I in terms of known functions.

However we shall see that the quasi-TEM approximation [2,3] of function D yields an approximation for the current in terms of exponentials.

Neglecting higher modes and choosing in the λ-plane a contour Γ_d indicated in Fig. 1.a such that none of the three poles corresponding to the three principal modes [2,4,5] belongs to the region between contours Γ and Γ_d, contour Γ in (1) may be replaced by contour Γ_d for $z > o$. Furthermore, contour Γ_d (and consequently its image Γ'_d in the h-plane (Fig. 1.b) has been chosen to satisfy the following conditions:

(i) — The quasi-TEM approximation for D is valid for h belonging to Γ'_0.

(ii) — Γ_1 and Γ_2 are steepest-descent paths (SDP) of $\exp(-j\lambda z)$.

As it is known [2,3], the quasi-TEM approximation is good for $|bh| \ll 1$ except in a region of the complex plane corresponding to h close to the branch point [4] $h_B = -k_o(n^2+1)^{-1/2}$. It can therefore be concluded from Fig. 1.b that Γ'_0 is one of the possible contours satisfying condition (i).

Condition (ii) implies that in arcs Γ'_1 and Γ'_2 where the quasi-TEM approximation ceases to be valid ($|bh| \gg 1$), $\exp(-j\lambda z)$ takes values that are sufficiently small for the error in the integral of (1) to be neglible when we replace

Original recebido para publicação em 23/9/85.

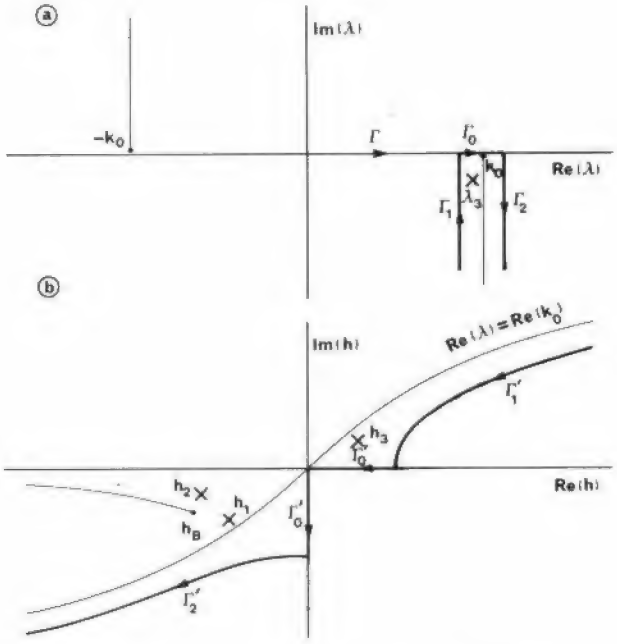


Fig. 1 Integration contour for the quasi-TEM approximation.

$\Gamma_d \equiv \Gamma_1 + \Gamma_0 + \Gamma_2 \qquad \Gamma_d' \equiv \Gamma_1' + \Gamma_0' + \Gamma_2'$

the integrand by its quasi-TEM approximation. This is possible except if $k_o z \ll 1$.

Before using the quasi-TEM approximation of the integrand of (1) in order to obtain an expression which, as already seen, will approximate the value for current I, we will express function D in the form [6]

$$D(h) = \frac{2k_o}{Z_o}\,[Z(h) - (h^2 - k_o^2)/Y(h)] \tag{3}$$

where

$$Z(h) = \frac{Z_o k_o}{2}\,[T(h) + P(h)]$$

$$Y(h) = \frac{-2k_o}{Z_o}\,[T(h) + Q(h)]^{-1}$$

Replacing D in (1) by its quasi-TEM approximation, and considering that $N(ah) \simeq 1$ for $|a\,h| \ll 1$, we obtain $I(z) \simeq I_Q(z)$ where I_Q is given by

$$I_Q(z) = \frac{VY_Q}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-j\lambda z)}{\lambda^2 + Z_Q Y_Q}\, d\lambda \tag{4}$$

where

$$Z_Q = Z(o) = j\,\frac{Z_o k_o}{\pi}\left[\ln\left(\frac{2b}{a}\right) + 2\int_o^{\infty} \frac{e^{-2bs}}{s + ju_{2Q}}\, ds\right]$$

$$Y_Q = Y(o) = j\,\frac{\pi k_o}{Z_o}\left[\ln\left(\frac{2b}{a}\right) + 2\int_o^{\infty} \frac{e^{-2bs}}{n^2 s + ju_{2Q}}\, ds\right]^{-1}$$

and $u_{2Q} = \sqrt{(n^2-1)k_o^2 - s^2}$. It should be noted that Z_Q and Y_Q have dimensions respectively of impedance per unit length and admittance per unit length [6]. By integrating (4) we finally obtain

$$I_Q(z) = \frac{V}{Z_c}\, e^{-j\beta_Q |z|} \tag{5}$$

where

$$Z_c = \sqrt{Z_Q/Y_Q} \text{ and } \beta_Q = \sqrt{-Z_Q Y_Q}$$

are respectively the characteristic impedance and the phase constant of an equivalent line of parameters Z_Q and Y_Q. (5) shows that the quasi-TEM approximation for the current is identical with the current which would be obtained in the equivalent line referred to above when excited by a generator of voltage V.

In Fig. 2 we give the error associated with the quasi-TEM approximation for the current (5) for the parameters previously chosen by Carpentier and dos Santos in [5]. From the comparison of the results presented in Fig. 2,

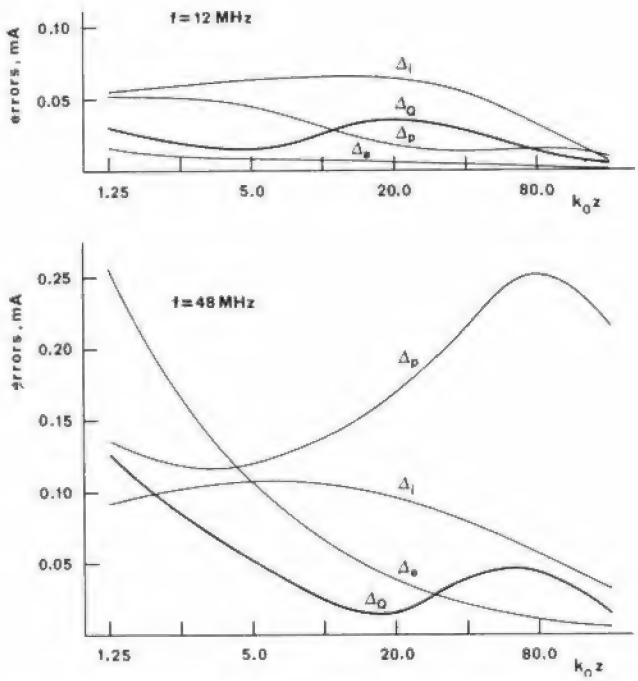


Fig. 2 Errors for various approximations of the current.

$\Delta_i = |I - I_i| \quad \Delta_p = |I - I_p| \quad \Delta_e = |I - I_e| \quad \Delta_Q = |I - I_Q|$

I_i : contribution of the improper mode [2,5]
I_p : contribution of the two proper modes [4,5]
I_e : contribution of the three modes in the form of error functions [5]
I_Q : the quasi-TEM approximation for the current I

$\epsilon_2/\epsilon_o = 15,\ \sigma_2 = 0.01$ S/m, a = 0.0025 m, b = 1 m

it can be concluded that the quasi-TEM approximation is normally more accurate than the one proposed by Chang and Olsen [4] (contribution of proper modes only) or than the contribution of the improper mode only [5]; but it is normally less accurate than the approximation obtained by the contribution of the 3 modes in the form of error functions [5].

It can thus be concluded that, from a practical point of view, one can use (5), whose accuracy is surprisingly good and which is extremely simple in comparison with representations in terms of modes.

Finally we would point out that, for very small values of $k_o z$, I_Q no longer constitutes a good approximation for I, owing to the fact that in this case the contribution of SDP arcs for $|b\ h| \gg 1$ cannot be neglected in the integral along Γ_d. On the other hand I and I_Q have different asymptotic behaviours when $k_o z$ tends to infinity. This is due to the fact that, while the quasi-TEM approximation for D is a second degree polynomial in h, D has an asymptotic behaviour in the vicinity of $h = o$ of the type [4] $C_0 + C_1 h^2 \ln h$ where C_0 and C_1 are constants.

ACKNOWLEDGEMENT: The author wishes to thank Dr. A.F. dos Santos for many helpful discussions and comments on the manuscript.

REFERENCES

1 — CARPENTIER, M.P. and DOS SANTOS, A.F.: "Nonspectral representation for the field of a horizontal wire above ground", Radio Sci., 1984, 19, pp. 812-828.
2 — DOS SANTOS, A.F.: "Electromagnetic-wave propagation along a horizontal wire above ground", Proc. IEE, 1972, 119, pp. 1103-1109.
3 — CARPENTIER, M.P. and DOS SANTOS, A.F.: "Validity of the quasi-TEM approximation for the modes supported by a horizontal wire above ground", Electron. Lett., 1980, 15, pp. 85-86.
4 — CHANG, D.C. and OLSEN, R.G.: "Excitation of an infinite antenna above a dissipative earth", Radio Sci., 1975, 10, pp. 823-831.
5 — CARPENTIER, M.P. and DOS SANTOS, A.F.: "New Representation for the current in a horizontal wire above ground", Electron. Lett., 1979, 15, pp. 554-556.
6 — WAIT, J.R.: "Theory of wave propagation along a thin wire parallel to an interface", Radio Sci., 1972, 7, pp. 675-679.

A TEMPERATURA COMO UM CONCEITO DERIVADO DA ENERGIA E DA ENTROPIA. TEMPERATURA KELVIN

RODRIGO DE ABREU
Instituto Superior Técnico, da UTL e Centro de Electrodinâmica, do INIC

SUMÁRIO

O conceito de temperatura Kelvin surge habitualmente sem que se ponha em causa o Primeiro Princípio da Termodinâmica. A revisão conceptual do Primeiro Princípio feita pelo autor leva a que, dado não ser possível atribuir com generalidade sentido físico à expressão de Clausius $dE = dW + dQ$, seja necessária a construção do conceito de temperatura Kelvin por outra via diferente da consagrada por longos anos de tradição. Para tal prescindiu-se do Primeiro Princípio e do Princípio Zero da Termodinâmica. Isto é possível dada a existência duma relação necessária entre energia, entropia e variáveis de deformação. Uma vez afirmada esta necessidade independentemente da noção de temperatura empírica, adquire-se grande simplicidade e economia de conceitos.

SUMMARY

The Kelvin concept of temperature generally arises without calling in question the First Principle of Thermodynamics. Since it is not possible to attribute a generalized physical sense to the Clausius expression $dE = dW + dQ$, the conceptual revision of the First Principle carried out by the author leads to the necessity of constructing the Kelvin concept of temperature in a way different from the one consecrated by long years of tradition. To this end, the First Principle and the Zero Principle of Thermodynamics have been dispensed with. This is possible owing to the existence of a necessary relation between energy, entropy and deformation variables. Once this necessity has been affirmed independently of the notion of empyrical temperature, a great simplicity is arrived at, as well as an economy of concepts.

Original recebido para publicação em 23/09/85.

INTRODUÇÃO

Considera-se habitualmente que o conceito de temperatura é essencial no estabelecimento das relações fundamentais da termodinâmica.

Mostra-se neste artigo a possibilidade de não se considerar inicialmente a temperatura (Princípio Zero da Termodinâmica) estabelecida que seja a necessidade de uma relação entre a energia e a entropia, conforme se mostrou em artigo recentemente publicado nesta revista.

O conceito de temperatura deixa, portanto, de ter carácter essencial, passando a ser parâmetro que deriva das grandezas energia e entropia. De facto, num sistema finito, se a energia e a entropia forem constantes para diversos valores das variáveis de deformação a temperatura também é constante, dado que ao longo da intersecção de duas superfícies $E = c^{te}$ e $S = c^{te}$ se verifica que $\frac{\partial E}{\partial S} = c^{te}$ (Tese de Doutoramento, I.S.T., U.T.L., 1983). Neste artigo mostra-se, no entanto, que é possível adquirir com facilidade e com menos abstracção o conceito de temperatura, recorrendo-se ao conceito de "Fonte de Calor" que se define pelos valores constantes das densidades de energia e de entropia.

A demonstração aqui apresentada não sofre de petitio principii dado que o segundo princípio não se baseia na variável entropia introduzida a partir dum conceito de temperatura empírica. Este é um dos aspectos essenciais deste trabalho.

A TEMPERATURA COMO UM CONCEITO DERIVADO DA ENERGIA E DA ENTROPIA.

Consideremos um sistema de energia E função da entropia e do volume.

O sistema pode ser decomposto em dois sub-sistemas satisfazendo as seguintes condições:

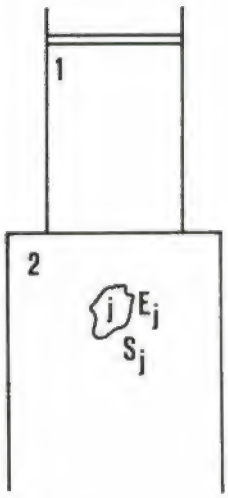


FIG.1

$E_1 = E_1\,(S_1, V_1)$ (E_1- energia do sub-sistema 1).
$E_2 = E_2(S_2)$ (E_2-energia do sub-sistema 2; $V_2 = c\,\underline{te}$).
$E = E\,(S,V)$ (E- energia do sistema constituído pela associação dos sub-sistemas 1 e 2).
$E = E_1 + E_2$,
$S = S_1 + S_2$,
$V = V_1 + V_2$
e
$V_2 = c\,\underline{te}$).

O sub-sistema 2 é considerado "infinitamente grande" de tal modo que os acréscimos de Energia por unidade de volume são nulos e deste modo um sub-sistema j de 2 (Fig. 1) tem Energia e Entropia constantes ($E_j = c\,\underline{te}$, $S_j = c\,\underline{te}$ e $V_2 = c^{te}$). Designa-se, habitualmente, o sub-sistema 2 por "Fonte de Calor" ou "Reservatório de Calor".

Consideremos uma variação dS_1 e dV_1, dS_2 e dV_2 —— temos que:

$$dE_1 = \frac{\partial E_1}{\partial S_1}\,dS_1 + \frac{\partial E_1}{\partial V_1}\,dV_1 \qquad (1)$$

e

$$dE_2 = \frac{\partial E_2}{\partial S_2}\,dS_2 \quad (V_2 = c\,\underline{te}). \qquad (2)$$

Como

$$E = E_1 + E_2 \qquad \text{(despreza-se um termo } E_{12} \text{ de interacção)} \qquad (3)$$

tem-se

$$dE = dE_1 + dE_2, \qquad (4)$$

Como

$$\frac{\partial E_1}{\partial V_1}_{S_1} = -P_1, \qquad (5)$$

(se o sub-sistema 1 for o Sistema dado não existir o sub-sistema 2, então $dE_1 = (dW)_{Rev.} = (f.\,ds) = -P_1 dV_1$ em que f é a força exercida na fronteira do sistema e P_1 é a pressão do sub-sistema 1),

e

$$dE = dE_1 + dE_2 = -\,pdV = -\,P_1\,dV_1, \qquad (6)$$

(dado estarmos a considerar $S = c\,\underline{te}$ e $dV = dV_1 + dV_2 = dV_1$),
temos

$$dE = \frac{\partial E_1}{\partial S_1}\,dV_1 + \frac{\partial E_1}{\partial S_1}\,dV_1 + \frac{\partial E_2}{\partial S_2}\,dS_2, \qquad (7)$$

$$-\,P_1\,dV_1 = \frac{\partial E_1}{\partial S_1}\,dS_1 - P_1\,dV_1 + \frac{\partial E_2}{\partial S_2}\,dS_2. \qquad (8)$$

Como se salientou $S = S_1 + S_2$ e $dS = o$ (reversível).
Logo

$$dS_1 = -\,dS_2 \qquad (9)$$

e portanto

$$\frac{\partial E_1}{\partial S_1} = \frac{\partial E_2}{\partial S_2}\,. \qquad (10)$$

Como (E_j, S_j) são constantes e podemos admitir (homogeneidade de 2) que

$$E_2 = m\,E_j \qquad (11)$$

e

$$S_2 = m\,S_j, \qquad (12)$$

temos

$$\frac{\partial E_2}{\partial S_2} = \frac{\partial E_j}{\partial S_j}\,. \qquad (13)$$

Temos, portanto, que

$$\frac{\partial E_1}{\partial S_1} = c\,\underline{te} \qquad (14)$$

ao longo dos pontos da transformação em que o sub-sistema 1 contacta 2,

$$\frac{\partial E_1}{\partial S_1} = \frac{\partial E_2}{\partial S_2} = c\,\underline{te}.$$

Designemos esta constante característica de 2 por ζ_2

$$\frac{\partial E_1}{\partial S_1} = \frac{\partial E_2}{\partial S_2} = \zeta_2.$$

Poderemos, portanto, escrever genèricamente a seguinte relação:

$$E = E\,(S,V),$$

$$dE = \frac{\partial E}{\partial V}\,dV + \frac{\partial E}{\partial S}\,dS,$$

$$dE = -\,pdV + \zeta\,dS. \qquad (15)$$

A Temperatura Kelvin

Consideremos um ciclo de Carnot definido pelos pontos PQRS (Fig. 2).

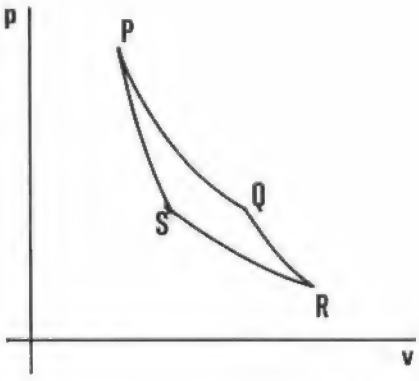


FIG. 2

Entre P e Q o sub-sistema que descreve o ciclo contacta com uma fonte F_1 caracterizada por ζ_1.

Entre S e R o sub-sistema contacta F_2 caracterizada por ζ_2.

As transformações QR e PS são isentrópicas caracterizadas por S_1 e S_2 respectivamente.

Entre P e Q temos (consideramos que E representa agora a energia do sub-sistema que descreve o ciclo e que entre P e Q contacta F_1):

$$dE = -pdV + \zeta_1 dS, \tag{16}$$

$$dE = -pdV + \zeta_2 dS \text{ (contacto com } F_2 \text{ entre R e S)}. \tag{17}$$

O rendimento do ciclo define-se pela relação

$$\eta = \frac{|\omega|}{|\Delta E_{F_1}|} \tag{18}$$

em que ω representa o trabalho realizado no ciclo e ΔE_{F_1} representa a variação de energia da fonte F_1.

Se chamarmos à energia do **sistema** $\bar{E}$, e $\bar{S}$ à entropia, temos que

$$\bar{E} = E + E_{F_1} + E_{F_2} \tag{19}$$

em que E é a energia do sub-sistema que descreve o ciclo e E_{F_1} e E_{F_2} são respectivamente as energias das Fontes F_1 e F_2 ($\bar{S} = S + S_{F_1} + S_{F_2}$).

No ciclo verifica-se a seguinte relação

$$\oint d\bar{E} = \int_{PQ} dE_{F_1} + \int_{RS} dE_{F_2} \text{ (dado } \oint dE = 0) \tag{20}$$

em que admitimos o ciclo a ser descrito no sentido PQRSP.

Logo

$$\underset{(PQRSP)}{\Delta\bar{E}} = \underset{PQ}{\Delta E_{F_1}} + \underset{RS}{\Delta E_{F_2}} \tag{21}$$

Simplificando a notação temos que

$$\Delta\bar{E} = \Delta E_{F_1} + \Delta E_{F_2} \tag{22}$$

Como $d\bar{E} = -pdV$ (veja relação (6))

$$\int_{PQ} -pdV = \int_{PQ} -pdV + \int_{PQ} \zeta_1 dS + \Delta E_{F_1} \tag{23}$$

dado que

$$\int_{PQ} d\bar{E} = \int_{PQ} dE + \int_{PQ} dE_{F_1} \tag{24}$$

e $dE = -pdV + \zeta\, dS$ ($\zeta = \zeta_1$ ao longo de PQ).

Deste modo

$$\zeta_1 \Delta S_{PQ} = -\Delta E_{F_1} \tag{25}$$

e da mesma forma

$$\zeta_2 \Delta S_{RS} = -\Delta E_{F_2}. \tag{26}$$

Temos, portanto, a seguinte relação:

$$\frac{\zeta_1 \Delta S_{PQ}}{\zeta_2 \Delta S_{RS}} = \frac{\Delta E_{F_1}}{\Delta E_{F_2}}. \tag{27}$$

Como $\frac{\partial E}{\partial S} = \zeta$ é maior que zero [2]

$$\frac{\zeta_1 |\Delta S_{PQ}|}{\zeta_2 |\Delta S_{RS}|} = \frac{|\Delta E_{F_1}|}{|\Delta E_{F_2}|}. \tag{28}$$

e como o $\oint d\bar{S} = O = \Delta S_{PQ} + \Delta S_{RS}$.

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{|\Delta E_{F_1}|}{|\Delta E_{F_2}|}. \tag{29}$$

O módulo do trabalho $|\omega|$ é dado por

$$d\bar{E} = dE + dE_F, \tag{30}$$

$$\oint d\bar{E} = \oint -pdV = \int_{PQ} dE_{F_1} + \int_{RS} dE_{F_2}, \tag{31}$$

$$\omega = \Delta E_{F_1} + \Delta E_{F_2}, \tag{32}$$

$$-|\omega| = -|\Delta E_{F_1}| + |\Delta E_{F_2}|, \tag{33}$$

dado que o trabalho é negativo e ΔE_{F_1} é negativo e ΔE_{F_2} é positivo no ciclo descrito no sentido horário. Como $\zeta > 0$ e $\Delta S_{PQ} = -\Delta S_{RS}$ temos que de (27) ΔE_{F_1} e ΔE_{F_2} têm sinais contrários. Se $\zeta_1 > \zeta_2$, $|\Delta E_{F_1}| > |\Delta E_{F_2}|$. Logo verifica-se (33).

Deste modo

$$\eta = \frac{|\omega|}{|\Delta E_{F_1}|} = 1 - \frac{|\Delta E_{F_2}|}{|\Delta E_{F_1}|}, \tag{34}$$

$$\eta = 1 - \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \quad \text{dado (29)}. \tag{35}$$

Històricamente a temperatura absoluta Kelvin T define-se pela seguinte relação estabelecida através dum ciclo de Carnot em que as fontes têm temperaturas empíricas θ_2 e θ_1

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{36}$$

Deste modo podemos fazer

$$\zeta = T \tag{37}$$

e passar a escrever

$$dE = -pdV + T\, dS \tag{38}$$

designando T por temperatura Kelvin.

De notar que a relação (38) é válida numa transformação infinitesimal (quasiestática) e não necessàriamente reversível.

De facto

$$\mathbf{d}E = \frac{\partial E}{\partial x_j} \mathbf{d}x^j \qquad (\mathbf{d} \text{ - diferencial exterior})$$

e

$dE = < \mathbf{dE}, dP >$ (contracção da forma **dE** e do vector dP onde dP é dP $= dx^j e_j$ que pode ter uma direcção qualquer e não ser necessàriamente tangente à transformação reversível).

Como E = E (S,V)

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S dV.$$

De notar também que se E se referir ao **sistema** e a transformação for reversível

$$dE = \frac{\partial E}{\partial V} dV \text{ dado } dS = 0.$$

No entanto para um sub-sistema e numa reversível

$$dE_1 = \frac{\partial E_1}{\partial V_1} dV_1 + \frac{\partial E_1}{\partial S_1} dS_1$$

onde dS_1 pode ser maior ou menor que zero.

A variação de entropia é nula numa transformação reversível quando nos referimos ao sistema e pode ser positiva ou negativa quando nos referimos a um sub-sistema.

Dado o anteriormente afirmado podemos enunciar com generalidade o Segundo Princípio da seguinte maneira:

A entropia dum **Sistema** só pode aumentar ou permanecer constante (*).

CONCLUSÃO

Nos últimos anos tem-se assistido a uma cuidadosa revisão conceptual dos Princípios da Termodinâmica.

Conforme se pode verificar nos artigos referidos [3,4,5] o conceito de temperatura surge sem se pôr em causa o Primeiro Princípio da Termodinâmica. A revisão conceptual do Primeiro Princípio foi feita pelo autor [1]. As conclusões então obtidas são as de que com generalidade não é possível atribuir sentido físico à expressão de Clausius do Primeiro Princípio dE = dW + + dQ. Sendo assim deve ser possível construir conceptualmente a termodinâmica por outra via diferente da consagrada por longos anos de tradição. Para tal torna-se necessário evidenciar de forma directa a relação entre a energia e a entropia [2].

Estabelecida esta relação a temperatura surge com grande facilidade como um conceito derivado não tendo que ser imposta à partida.

Adquire-se deste modo grande simplicidade e economia de conceitos.

(*) O enunciado, frequentemente considerado geral, de que a variação de entropia de um sistema isolado é maior ou igual a zero é, evidentemente, um caso particular [6].

1. Rodrigo de Abreu, Contribuição para o esclarecimento de alguns problemas fundamentais associados aos primeiro e segundo princípios da termodinâmica — transformações relativistas das grandezas da termodinâmica, Tese, Instituto Superior Técnico, Lisboa (1983) (não publicado).
2. Rodrigo de Abreu, Variação de Entropia e Reversibilidade, Técnica, N.º 1/2, 1985.
3. D. Home, Concept of temperature without the Zeroth law, Am. J. Phys, 45(12), Dec. 1977.
4. P. Ehrlich, The Concept of temperature and its dependence on the laws of thermodynamics, Am. J. Phys., 49(7), July 1981.
5. J.S. Thomsen, Comment on "The Concept of temperature and its dependence on the laws of thermodynamics", Am. J. Phys. 51(5), May 1983.
6. Rodrigo de Abreu, O Conceito de Sistema e o significado físico das grandezas trabalho e calor (a ser publicado).

ON THE VARIANCE OF THE OUTPUT SIGNALS FROM SPECTRAL ANALYZERS

F. E. REBELO SIMÕES (*)

ABSTRACT

An exact expression for the normalized variance of the output signal from spectral analyzers is derived, for the special case of nonheterodyne analyzers with constant percentage bandwidth ideal filters and RC integrator. The input is assumed to consist of large samples of a stationary Gaussian process.

RESUMO

Determina-se a expressão exacta da variância normada dos sinais de saída do analisador espectral não heterodínico com filtros ideais de banda de percentagem constante e integrador RC. Supõe-se que os sinais de entrada são amostras suficientemente extensas dum processo gaussiano estacionário.

1. INTRODUCTION

The aim of this short paper is to determine the exact expression of the normalized variance of output signals from non-heterodyne spectral analyzers for stationary Gaussian input samples (fig. 1).

The analyzer is supposed to consist of a set of constant percentage bandwidth bandpass filters with impulse response h(t), a squaring device and a RC lowpass filter (averaging integrator) of impulse response g(t).

FIG. 1

We have thus

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) x(t-\mu)\, d\mu \qquad (1)$$

$$y(t) = v^2(t) \qquad (2)$$

with

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\, y(t-v)\, dv \qquad (3)$$

$$g(t) = (1/RC)\exp(-t/RC) \qquad t > 0$$
$$= 0 \qquad t < 0 \qquad (4)$$

The following simplifying hypotheses are assumed:

(a) the input sample duration is much larger than the time constant RC,

(b) the power spectrum $S_x(\omega)$ of the input process is smooth at filter bandwidth scale.

(c) each filter is ideal rectangular.

For the assumed filters the following parameters are defined (fig. 2)

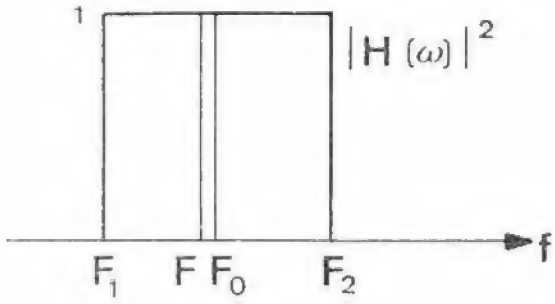


FIG. 2

F_1, F_2 - lower and upper limit frequencies
F - center frequency (geometric average)
F_o - medium frequency (arithmetic average)
$\sqrt{k} = F_2/F = F/F_1$
$B = F_2 - F_1$ bandwidth
$p = 100\ B/F$ bandwidth percentage

* Instituto Superior Técnico and Centro de Análise e Processamento de Sinais da Universidade Técnica de Lisboa.

Original recebido para publicação em 15/11/85.

Two examples are studied: the 1/3 octave and the 1% filter, for which $k = \sqrt[3]{2}$, $p = 23.156\%$; and $k = 1.01005....$, $p = 1\%$, respectively.

The relative differences $(F_o - F)/F$ are respectively 6.68×10^{-3} and 1.25×10^{-5}, which means that we may take, in the following, $F_o = F$.

2. DETERMINATION OF THE STATISTICAL AVERAGE Ez(t)

Fig. 3 shows the input signal power spectrum and the power transfer function of the filter, centered at $f = F = F_o$.

From eqs. (2) to (4), and under hypothesis (a), we get

$$Ez(t) = Ey(t) = R_v(0) \tag{5}$$

$R_v(\tau)$ being the autocorrelation function of v(t).

As $R_v(\tau)$ is the inverse Fourier transform of the power spectrum $S_v(\omega)$, given (fig. 4) by

$$S_v(\omega) = S_x(\omega)|H(\omega)|^2 \tag{6}$$

it follows

$$Ez(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\,|H(\omega)|^2\, d\omega/2\pi \tag{7}$$

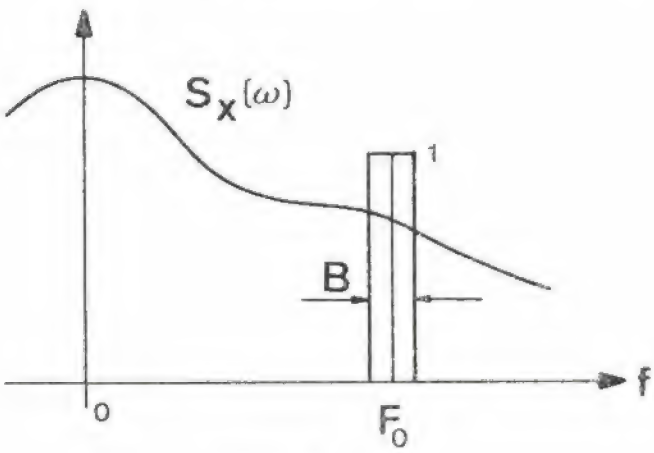


FIG.3

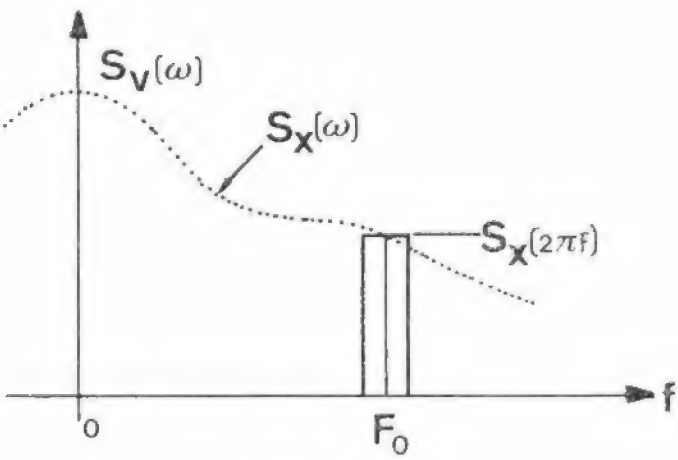


FIG.4

Expanding $S_x(\omega)$ in Taylor series in the vicinity of $f = F$, it is possible to obtain [1], [2] for smooth spectra

$$Ez(t) = 2B\,[S_x(2\pi F) + D] \tag{8}$$

with

$$D \simeq \frac{B^2}{24}\left[\frac{d^2 S_x(2\pi f)}{df^2}\right]_F \tag{9}$$

Expression (8) suggests the choice of

$$\hat{S}_{x(2\pi F)} = z(t)/2B \tag{10}$$

as an estimator of $S_x(2\pi F)$, so that D becomes the bias of the estimator.

3. DETERMINATION OF THE STATISTICAL VARIANCE OF z(t). APPROXIMATE EXPRESSIONS

Let $z_o(t)$ be the zero mean signal z(t) - Ez(t).

The autocorrelation function of this signal is the covariance function of z(t), $C_z(\tau)$, of which the Fourier transform is the power spectrum $S_{z_o}(\omega)$. In the same way we define $y_o(t)$ and $S_{y_o}(\omega)$, the two spectra being related by

$$S_{y_o}(\omega) = S_{t_o}(\omega)\,|G(\omega)|^2 \tag{11}$$

where $G(\omega)$ is the Fourier transform of g(t).

From the above we may conclude that

$$\text{var } z(t) = C_z(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_o}(\omega)\,|G(\omega)|^2\, d\omega/2\pi \tag{12}$$

In order to evaluate $S_{y_o}(\omega)$ we express it in terms of its inverse Fourier transform, $C_y(\tau)$ which may be written, from (2), as

$$C_y(\tau) = Ev^2(t)v^2(t+\tau) - Ev^2(t)Ev^2(t+\tau)$$
$$= Ev^2(t)v^2(t+\tau) - R_v^2(0) \tag{13}$$

in which $Ev = 0$, because of the filtering action.

Now, for zero mean Gaussian variables one has the known relation [3]

$$Ev_1 v_2 v_3 v_4 = Ev_1 v_2\, Ev_3 v_4 + Ev_1 v_3\, Ev_2 v_4 + Ev_1 v_4\, Ev_2 v_3 \tag{14}$$

which yields the result

$$C_y(\tau) = 2R_v^2(\tau) \tag{15}$$

In the frequency domain and since $S_v(\omega)$ is an even function, the above relation takes the form

$$S_{y_o}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} S_v(\lambda)S_v(\lambda+\omega)\,d\lambda/2\pi \tag{16}$$

For a rectangular filter of center frequency F and symmetrical about F_o in linear scale, the spectrum $S_{y_o}(\omega)$ has the form represented in fig. 5, under the hypothesis (b). It must be remarked that a variation of 35% of $S_x(\omega)$ within the filterband will produce only a 1% error on $S_{y_o}(\omega)$. Fig. 5 shows also the graphic of $|G(\omega)|^2$.

As for the integrator a "noise bandwidth" is defined

$$B_g = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega/2\pi \Big/ |G(\omega)|^2_{max} = 1/T \tag{17}$$

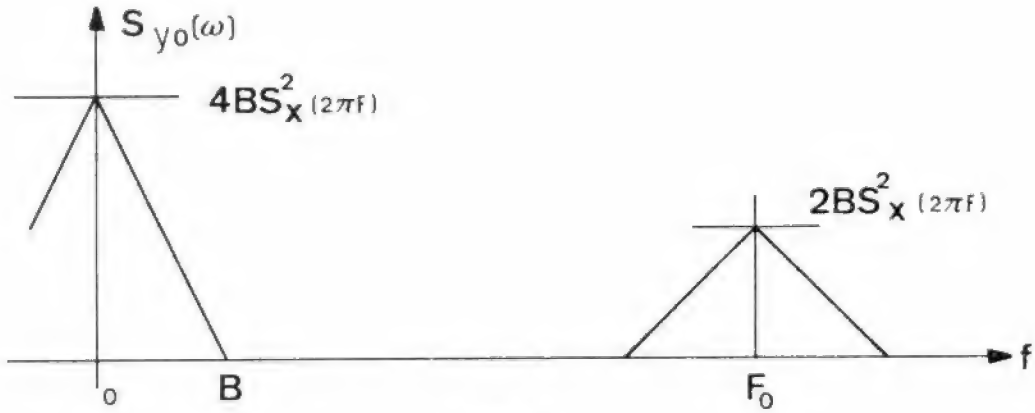


FIG. 5

in which T is the "averaging time".

As it will be seen later, it is desirable to have $B \gg B_g$, i.e., $BT \gg 1$, for reducing the measuring error. In these circumstances, it is usual practice [2] in the evaluation of var z(t) to take $S_{y_0}(0)$ for $S_{y_0}(\omega)$ in the integral (12), because of the concentration of $|G(\omega)|^2$ near zero, thus disregarding the slope of the central triangle and the presence of the other two.

In this way we get

$$\text{var } z(t) = 4BB_g S^2_{x(2\pi F)} = 4BS^2_x(2\pi F)/T \qquad (18)$$

Under hypothesis (b), $D \ll S_x(2\pi F)$, so that we can write in normalized form

$$\sigma^2 = \frac{\text{var } z(t)}{[Ez(t)]^2} = \frac{1}{BT} \qquad (19)$$

which also holds for the estimator $\hat{S}_x(2\pi F)$, by (10).

4. EXACT EXPRESSIONS OF var z(t) AND σ^2[1]

In order to correct the expressions (18) and (19) in the cases for which BT is not much greater than unity, we only have to substitute in (12) the expression of $S_{y_0}(\omega)$, easily taken from fig. 5, and $|G(\omega)|^2$, given by

$$|G(\omega)|^2 = 1/[1+(\omega RC)^2] \qquad (20)$$

which is readily obtained from (4).

This last expression also yields the averaging time

$$T = 2RC \qquad (21)$$

The final result of the integration is the following:

$$\text{var } z(t) = 4B^2S^2_x(2\pi F)[U(BT\pi) - V(BT\pi)] \qquad (22)$$
$$\sigma^2 = U(BT\pi) - V(BT\pi) \qquad (23)$$

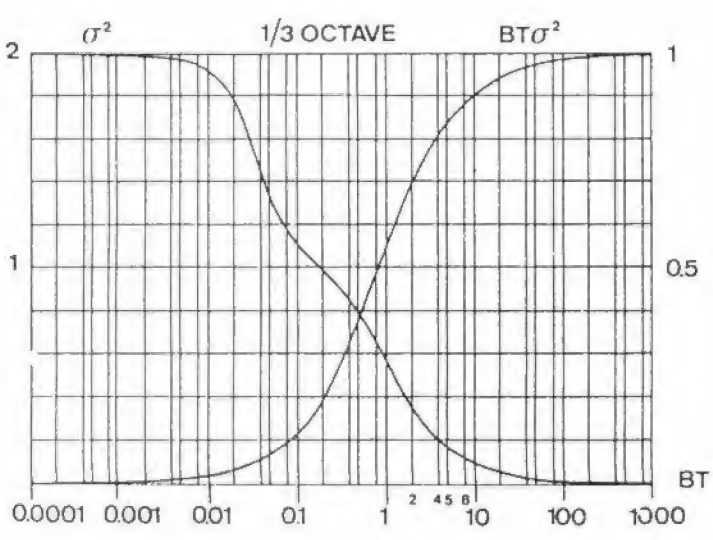


FIG 6

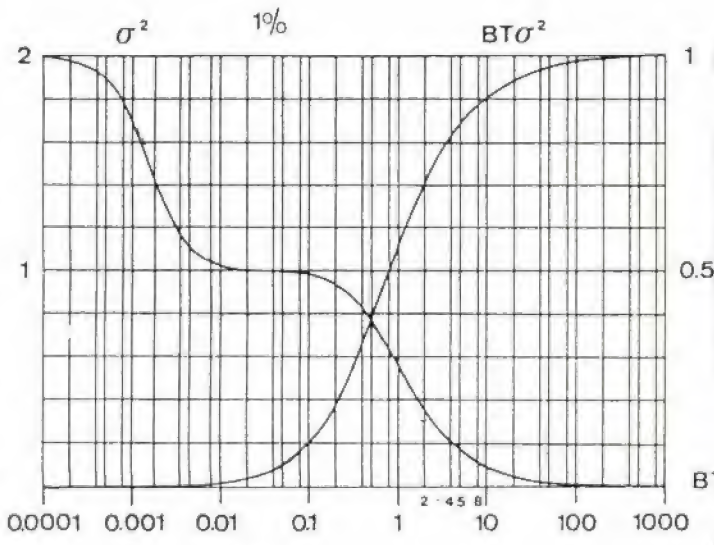


FIG 7

where

$$wU(w) = 2\text{arctg}\, w - 2m\, \text{arctg}\, mw + (m+1)\, \text{arctg}\, (m+1)w + (m-1)\text{arctg}\, (m-1)w$$

$$w^2V(w) = \log(1+w^2) - \log[1+m^2w^2] + \frac{1}{2}\log[1+(m+\frac{1}{2}\log[1+(m-1)^2w^2] \quad (24)$$

$$m = 2F_o/B \quad (25)$$

We can conclude from (23)/(24) that

$$\lim_{BT \to \infty} BT\,\sigma^2 = 1 \quad (26)$$

$$\lim_{BT \to 0} \sigma^2 = 2 \quad (27)$$

Figs. 6 and 7 show σ^2 and $BT\sigma^2$ as functions of BT, for the two filters of 1/3 octave and 1%, for which m = 8.6946... and 200,0025... respectively. For an easier examination of the curves a logarithmic scale was used.

We may conclude that in either case it is only legitimate to use the approximation 1/BT for relatively large values of BT.

In fact, for BT = 10 the approximation 1/BT yields an error of 9%, while for BT = 5 the error rises to 15%. If we go down further we find that the true value of σ^2 is 0,56 instead of 1, for BT = 1.

For extremely low values of BT, the above approximation becomes meaningless. In fact, for BT = 0.05 we will get for σ^2 the true values 1.346 and 0.997 for 1/3 octave and 1% filters, against the approximation value 1/BT = 20.

As a final comment we must note that in both approximate and exact expressions, the admissible values of σ^2 for a reasonable measurement imply relatively large values of BT, as we stated before.

REFERENCES

[1] REBELO SIMÕES - Determinação do espectro de potência por meio do analisador espectral não heterodínico, para sinais de duração ilimitada — Report C.A.P.S., Feb 1980

[2] BENDAT AND PIERSOL - Measurement and analysis of random data — Wiley, 1967

[3] STRATONOVICH - Topics in the theory of random noise — Vol I — Gordon and Breach, 1963

NORMAS PARA ADMISSÃO DE TRABALHOS E INSTRUÇÕES PARA OS AUTORES

1. A Revista TÉCNICA, em princípio, publicará anualmente quatro números de natureza técnico-científica.

2. Atendendo ao espaço disponível e carácter científico que se deseja imprimir à Revista, as três formas de publicação previstas, revestir-se-ão das seguintes características:

ARTIGOS POR CONVITE — Trabalho de síntese, no domínio da investigação científica ou no domínio do desenvolvimento, contemplando actividade desenvolvida entre nós, ou pelo menos, de interesse para o desenvolvimento científico e tecnológico do País.

ARTIGOS TÉCNICO-CIENTÍFICOS — Trabalho de investigação científica ou de aplicação tecnológica a um domínio bem definido da ciência ou da técnica e de que o autor seja um especialista.

NOTAS CIENTÍFICAS — Destinam-se essencialmente à apresentação de novos resultados no domínio da investigação científica ou do desenvolvimento tecnológico. Pretende-se uma nota curta, realçando os resultados alcançados e referenciando convenientemente trabalhos afins, evitando a exposição longa de antecedentes, que deverá ser remetida para referências.

3. Os artigos por convite e os artigos técnico-científicos, deverão ser escritos em língua portuguesa. As notas científicas poderão ser escritas em língua estrangeira, de preferência em inglês.

4. Os autores deverão atender na elaboração dos artigos às seguintes condições:

— os artigos convidados não poderão exceder 30 páginas dactilografadas, incluindo o espaço reservado a ilustrações;
— os artigos técnico-científicos não poderão exceder 15 páginas dactilografadas, incluindo o espaço reservado a ilustrações;
— as notas científicas não poderão exceder 8 páginas dactilografadas.

5. Os trabalhos devem ser dactilografados a dois espaços, em folhas modelo A4, devidamente numeradas.

6. Os trabalhos devem ser enviados em duplicado, recomendando-se aos autores que conservem uma cópia.

7. Conjuntamente com o trabalho, devem ser enviados:

— título do trabalho em português e inglês;
— resumo e abstract;
— nome, direcção e telefone do autor e demais dados que facilitem o processo de revisão de provas.

8. Os autores deverão assegurar-se, antes de enviarem os originais, que estes não contenham erros, falta de dados, etc., pois que, na fase de revisão de provas, apenas se corrigirão erros de composição tipográfica.

9. As referências bibliográficas serão indicadas no texto por ordem numérica, usando algarismos árabes entre colchetes, e a lista das mesmas, no final do artigo, obedecerá às seguintes normas:

Artigos de revistas: nome(es) do autor(es) e iniciais nome da revista, número do volume, página e ano, entre parêntesis. O título do artigo só deverá ser mencionado se isso constituir matéria fundamental para esclarecimento.

Livros: nome do autor e iniciais, título, editora, ano de publicação e páginas.

10. Os Quadros ou Tabelas, numerados em romano, devem figurar no texto datilografado, podendo ser encimados por um título conciso.

11. Os gráficos devem ser desenhados a tinta da china, em folhas separadas e prontos para serem reproduzidos. Quaisquer letras ou algarismos que neles figurem, deverão ser suficientemente grandes para permitir a sua redução que, em princípio, fica ao critério do editor.
As folhas com os gráficos, figuras ou fotografias, serão numeradas, indicando-se o trabalho a que dizem respeito. Além disso, no texto, indicar-se-à o local para a respectiva inclusão.

NOTA: *A TÉCNICA salienta a necessidade de os autores, quando for o caso, obterem em tempo as devidas autorizações de reprodução de excertos de outras obras, sendo esta matéria da inteira responsabilidade do autor.*

A TÉCNICA procurará, sempre que possível e por princípio, o parecer de individualidades de reconhecida competência técnico-científica, no sentido de apurar da originalidade, qualidade e interesse científico dos trabalhos que lhe são enviados. Esta atitude não se aplica aos artigos convidados, a menos que os autores o desejem. À Direcção da TÉCNICA, caberá sempre a ceitação ou recusa dos originais que lhe sejam enviados. A TÉCNICA notificará os autores ou devolverá os trabalhos submetidos a apreciação num prazo máximo de 90 dias após a recepção do original. Os trabalhos publicados, serão registados com a data de recepção do original na TÉCNICA e disso se dará pública notícia em respectiva nota de fim de página.

A TÉCNICA oferecerá cinco exemplares da Revista, por cada trabalho publicado, independentemente do número de autores.

anuncie na técnica

Com uma tiragem de 5 000 exemplares e uma difusão à escala nacional e internacional a "TÉCNICA" abarca nos seus leitores quadros científicos e técnicos das mais variadas empresas, bem como grande número de professores e estudantes universitários.
Face a isto, poderemos concluir que se a "TÉCNICA" merece o apoio de todos os que de algum modo se encontram ligados à Engenharia — Escolas, Institutos de Investigação e Empresas — ela é, para além de um veículo da investigação teórica e experimental, um veículo por excelência de produtos e serviços, em suma, das actividas da vossa empresa.
Através da inserção de publicidade da vossa empresa na revista "TÉCNICA" está apoiando esta publicação e comunicando com um universo de potenciais interessados nas vossas actividades.

ANUNCIE NA "TÉCNICA", CONTACTE-NOS:
Técnica • aeist
Av. Rovisco Pais — 1000 LISBOA — Tels. 88 10 18 / 89 75 15

design Fernando Cardoso

INESC
Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores